

Є.Ф. Чекулаєв

ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

Краматорськ 2018

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

Є.Ф. Чекулаєв

ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

Навчальний посібник

Рекомендовано

Міністерством освіти і науки України

для самостійної роботи і виконання

контрольних завдань з дисципліни

«Гідрогазодинаміка»

студентами денної та заочної

форм навчання спеціальності 151

Краматорськ 2018

УДК 532.5
ББК 22.253.3
Ч - 37

Рецензенти:

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист №

Чекулаєв Є.Ф.

Ч - 37 Гідрогазодинаміка: Навчальний посібник для самостійної роботи і виконання контрольних завдань з дисципліни «Гідрогазодинаміка» студентами денної та заочної форм навчання спеціальності 151. – Краматорськ: ДДМА, 2018. - 90 с.

ISBN

Викладено зміст розділів дисципліни, наведені роз'яснення до самостійної роботи студентів при вивченні програмних питань з посиланням на літературні джерела, контрольні питання для самоперевірки засвоєння розділів дисципліни, а також завдання для контрольних робіт.

Призначено для студентів спеціальності «Автоматизоване управління технологічними процесами».

УДК 532.5

ББК 22.253.3

© Є.Ф. Чекулаєв, 2018

© ДДМА, 2018

ISBN

Зміст

ВСТУП.....	
1 ГІДРОСТАТИКА.....	
1.1 Основні властивості робочого середовища.....	
1.2 Гідростатичний тиск.....	
1.3 Основне рівняння гідростатики.....	
1.4 Практичне використання закону Паскаля.....	
1.5 Зусилля тиску на поверхні плоских і криволінійних стінок.....	
2 КІНЕМАТИКА І ГІДРОГАЗОДИНАМІКА.....	
2.1 Кінематика рідини і газу.....	
2.2 Динаміка рідини і газу.....	
2.3 Режими руху робочого середовища і основи гідродинамічної подібності	
2.4 Ламінарний і турбулентний рух рідини і газу.....	
2.5 Витікання рідини і газу через отвори і насадки.....	
2.6 Гідравлічний розрахунок трубо- і газопроводів.....	
2.7 Взаємодія потоку робочого середовища зі стінками.....	
2.8 Об'ємні гідравлічні машини і лопатеві відцентровані насоси.....	
2.9 Загальні відомості з гідравлічного і пневматичного приводів.....	
2.10 Контрольна робота.....	
Додаток А. Співвідношення одиниць виміру параметрів робочого середовища.....	
Додаток Б. Фізичні властивості рідини і газу.....	
Додаток В. Параметри деяких плоских фігур.....	
Додаток Г. Еквівалентна шорсткість труб.....	
Література	

ВСТУП

Гідрогазодинаміка являє собою прикладну технічну науку, яка на підставі законів статички, кінематики і динаміки робочого середовища (рідина, газ) формує методики використання теоретичних положень для вирішування інженерних задач у різноманітних галузях промисловості. Розвиток науково-технічного прогресу постійно потребує розширення використання гідравлічних і пневматичних пристроїв у автоматизованому технологічному обладнанні (металорізні верстати; ковальсько – пресові; штампувальні і згинальні верстати; промислові маніпулятори; гнучкі виробничі лінії та ін.).

Дисципліна «Гідрогазодинаміка» відповідно Освітньо-професійної програми підготовки фахівців зі спеціальністю 7.092501 «Автоматизоване управління технологічними процесами» є обов'язковою і відноситься до циклу професійної та практичної підготовки. Метою викладання дисципліни «Гідрогазодинаміка» є здобуття навичок використання законів гідростатики і гідродинаміки для проектування елементів і пристроїв гідро пневмоавтоматики. Для вивчення усієї дисципліни необхідно засвоєння наступних дисциплін: «Вища математика», «Технічна механіка» і «Основи термодинаміки». Знання і вміння отримані при засвоєнні дисципліни «Гідрогазодинаміка» використовуються при виконанні дипломного проекту, а також при вивченні дисциплін «Виконавчі механізми і регулюючі органи» і «Гідропневмопривід і пристрої автоматики».

Матеріал дисципліни «Гідрогазодинаміка» розміщен у наступних модулях:

- модуль 1 «Гідростатика»
- модуль 2 «Гідрогазодинаміка»

Методичний посібник ні у якому разі не замінює існуючу літературу, а тільки її доповнює відповідно програмі дисципліни.

1 ГІДРОСТАТИКА

1.1 Основні властивості робочого середовища

Основні фізико-механічні властивості рідини і газу. Зусилля, які діють на робоче середовище (рідина, газ). Густина. В'язкість. Стисливість і пружність робочого середовища. Неньютоновість рідини. Віскозиметри. Розчинність газів у рідинах. Випарювання і кипіння рідини. Кавітація. Швидкість розповсюдження звука. Теплоємність робочого середовища. Ідеальна рідина. Часні випадки термодинамічного процесу, основні рівняння.

Зміст теми викладений у літературі [1, с. 11-21; 2, с. 6-15; 3, с. 11-28; 4, с. 7-14; 5, с. 8-18; 6, с. 3-23].

1.1.1 Теоретичні відомості і рекомендації

Робочим середовищем називають фізичне тіло, яке має малу рухомість частиць. Робоче середовище може бути крапельним (рідина) і газоподібним (гази). Крапельна рідина має властивість текучості і це її відрізняє від газу. Рідина і газ не зберігають свою форму, як тверді тіла, і набувають форму посудини, у якій вони знаходяться.

Робоче середовище має основні наступні властивості:

1 Густина – маса, яка знаходиться у одиниці об'єму

$$\rho = \frac{m}{W}, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

де m - маса, кг;

W - об'єм, м³.

2 Питома вага – вага одиниці об'єму

$$\gamma = \frac{G}{W}, \frac{\text{Н}}{\text{м}^3},$$

де G - вага, Н.

Вагу можна розрахувати згідно з другим законом Ньютона

$$G = m \cdot g, \text{ Н},$$

де g – прискорення вільного падіння, м/с^2 .

Тоді

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{W} = \rho \cdot g, \frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \quad (\text{тому, що } 1 \frac{\text{кГс}}{\text{м}^3} = 9.81 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}).$$

Для спрощення розрахунків використовують відносні значення густини і питомої ваги:

$$\delta = \frac{\gamma}{\gamma_p} = \frac{\rho \cdot g}{\rho_p \cdot g} = \frac{\rho}{\rho_p},$$

де γ_p (ρ_p)- питома вага (густина) дистильованої води при 4°C і атмосферному

Тому незалежно від використовуваної для розрахунків системи МКГСС або СІ, відносні значення питомої ваги і густини однакові.

3 Стисливість – властивість робочого середовища змінювати об'єм при зміні на об'єм всебічного тиску.

Стисливість характеризується коефіцієнтом об'ємного стиснення β_W , являє собою відносну зміну об'єму робочого на одну одиницю

$$\beta_W = \frac{1}{W} \left(\frac{\Delta W}{\Delta P} \right), \frac{\text{м}^2}{\text{Н}},$$

де ΔW - зміна першопочаткового об'єму W при зміні на об'єм тиску ΔP .

Пружність – властивість робочого середовища поновлювати свій об'єм після припинення дії тиску на нього. Пружність характеризується модулем об'ємної пружності

$$E_{p.c} = \frac{1}{\beta_W} = \frac{W}{\Delta W} \cdot \Delta P, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Пружність – явище негативне, яке зменшує жорсткість гідро (пнемо) системи і тому погіршує динамічні якості слідку вальних пристроїв і приводів. Для мінеральних мастил модуль об’ємної пружності при атмосферному тиску і температурі +20°C має значення $E_p = (1.35 \dots 1.75) \cdot 10^9$, H / M^2 . Ці значення зменшуються при підвищенні температури і збільшуються при підвищенні тиску. Газ (повітря, азот) мають малий модуль об’ємної пружності і він практично дорівнюється тиску, який діє на об’єм газу, тобто

$$E_G = P, \frac{H}{M^2}.$$

За умовами малого значення модуля об’ємної пружності газу при дії на нього значного тиску об’єм газу накопичує енергію, яка може перетворитися у кінетичну енергію рухомих мас і в ударні навантаження. Модуль об’ємної пружності металів у 100 разів більше ніж модуль об’ємної пружності рідини $E_M = (200 \dots 210) \cdot 10^9$, H / M^2 . Робоче середовище функціонує у корпусах (сосудах) виготовлених із твердих матеріалів, які при дії навантаження на робоче середовище деформуються. Тому при розрахунках динамічних характеристик застосовують приведений модуль об’ємної пружності

$$E_n = E_{p.c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{E_{p.c} \cdot D}{E_M \cdot \delta}}, \frac{H}{M^2},$$

де D – діаметр гідро (пнемо) пристрою;

δ – товщина корпусу пристрою.

- 4 В’язкість – властивість рідини і газу чинити опір відносному зсуву шарів сусідніх шарів. Ця обставина слідкує про наявність сил внутрішнього тертя. У 1686 році Ньютоном була визначена залежність сили тертя (гіпотеза)

$$T = \mu \cdot S \frac{dU}{dh},$$

де μ - абсолютний (динамічний) коефіцієнт в'язкості;

S - площа спряжених поверхонь;

$\frac{dU}{dh}$ - градієнт швидкості руху у шарах (див. рис. 1.1).

Дотична напруга сил внутрішнього тертя

$$\tau = \frac{T}{S} = \mu \frac{dU}{dh}, \frac{H}{m^2}.$$

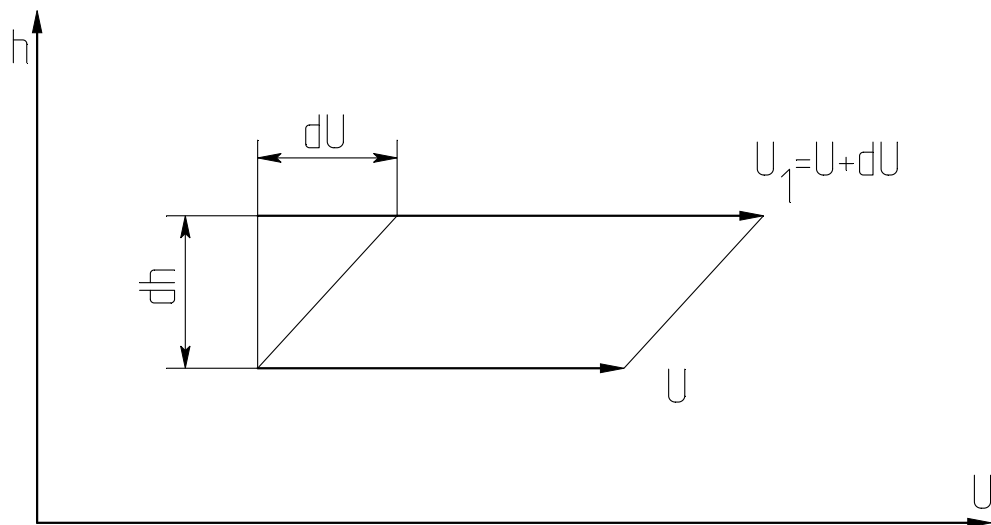


Рисунок 1.1 – Схема руху в'язкої рідини

Звідкіля

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{dU}{dh}}, \frac{H}{m^2} c \quad (Па \cdot c = Пуаз)$$

Одиниці розмірності μ : $1 \text{ Пз} = 0,102 \frac{H}{m^2} c = 0,102 \text{ Па} \cdot c$;

$1 \text{ сПз (Сантіпуаз)} = 0,001 \text{ Пз (Пуаз)}$.

Напруга сил тертя у не ньютонівських рідинах визначається залежністю

$$\tau = \tau_o \pm \mu \frac{dU}{dh},$$

де τ_o - гранична напруга зсуву.

При рішенні багатьох інженерних задач застосовується кінематичний коефіцієнт в'язкості, який являє собою відношення динамічного коефіцієнта в'язкості μ до густини ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \frac{M^2}{c},$$

де ν - кінематичний коефіцієнт в'язкості.

Одиниця виміру ν : $\frac{cM^2}{c} \left(\frac{M^2}{c} \right)$,

$$1 \frac{cM^2}{c} = 1 \text{ Ст} \text{ (Стокс)}; 1 \text{ cСт} \text{ (Сантістокс)} = 0,01 \text{ Ст} ;$$

$$1 \frac{M^2}{c} = 10^4 \text{ Ст} = 10^6 \text{ cСт} .$$

Кінематичний коефіцієнт в'язкості залежить від температури:

- для рідини

$$\nu_t = \nu_{50} \left(\frac{50}{t} \right)^n ;$$

- для газу

$$\nu_T = \nu_{273} \left(\frac{T}{273} \right)^{1,75} ,$$

де $T = t + 273$ - температура по Кельвіну;

t - температура по Цельсію.

Кінематичний коефіцієнт в'язкості залежить від тиску для рідини і газу:

$$\nu_p = \nu_{am} (1 + k \cdot p) ,$$

де p і k - коефіцієнти, які залежать від роду робочого середовища.

У довідниках значення ν приводяться для нормальних станів:

- рідини – при $t = +50^{\circ}\text{C}$ і $P_{\text{ат}}$;
- газу – при $t = 0^{\circ}\text{C}$ (273°K) і $P_{\text{ат}}$.

Для дослідження значення коефіцієнтів в'язкості рідини застосовуються різноманітні віскозиметри:

- Хеплера, ротаційний, ультразвуковий, вібраційний (для визначення значень μ);
- Освальда – Пінкевича, Енглера та інш. (для визначення значень ν).

Віскозиметр Енглера, являє собою посудину ємністю 200 см^3 і у нижній частині з отвором діаметром $2,8\text{ мм}$. Замірюють час витікання із посудини рідини при завданій температурі і дистильованої води при температурі $+20^{\circ}\text{C}$.

$$\text{Градуси Енглера } {}^{\circ}E = \frac{t_p}{t_e},$$

де t_p і t_e - час витікання 200 см^3 відповідно рідини та дистильованої води.

Коефіцієнти в'язкості рідини можна розрахувати по залежностям Уббелоді:

$$\mu = \left(7,24 \cdot {}^{\circ}E - \frac{6,25}{{}^{\circ}E} \right) \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с};$$

$$\nu = \left(7,24 \cdot {}^{\circ}E - \frac{0,0631}{{}^{\circ}E} \right) \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

5 Питомий об'єм – об'єм у якому розміщується одиниця маси робочого середовища

$$\vartheta = \frac{W}{m} = \frac{1}{\rho}, \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}.$$

- 6 Питома об'ємна теплопровідність – кількість теплової енергії, яку потрібно підвести до одиниці маси щоб підвищити її температуру на 1°K (1°C). Визначають теплопровідність при постійному тиску C_p та постійному об'ємі C_w .

Показник адіабати

$$K = \frac{C_p}{C_w} = 1,405$$

- 7 Ідеальне робоче середовище – середовище (рідина, газ), у об'ємі якого повністю відсутня в'язкість.
- 8 Рівняння стану ідеального газу являє собою залежність питомого об'єму (або густини) газу \mathcal{V} від температури T і тиску P (рівняння Клапейрона):

$$P \cdot \mathcal{V} = R \cdot T,$$

де R - питома газова постійна, для сухого повітря у системах

$$\text{МКГСС і СІ} \quad R = 29,27 \frac{\text{кДж} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}.$$

Згідно з першим законом термодинаміки питома кількість тепла, яке підводиться до одиниці ваги газу, визначається

$$dq = C_w dT + A p d\mathcal{V},$$

де A - термодинамічний еквівалент роботи.

Можливі окремі випадки термодинамічного процесу:

- Ізохорний процес, який функціонує при постійному значенні питомого об'єму $\mathcal{V} = const$. Тоді $A p d\mathcal{V} = 0$ і $dq = C_w dT$, тобто усе підведене тепло пішло на підвищення внутримолекулярної (кінетичної) енергії газу. Для двох станів газу рівняння Клапейрона

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

- Ізобарний процес, який протікає при постійному тиску $P = const$. При цьому процесі підведене тепло витрачається на підвищення кінетичної енергії газу $C_W dT$ і на виконання механічної роботи $Apd\vartheta$. Для двох станів газу рівняння Клапейрона

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

- Ізотермічний процес, який проходить при постійній температурі $T = const$. Тоді $C_W dT = 0$, а усе підведене тепло витрачається на механічну роботу $dq = Apd\vartheta$. Для двох станів газу рівняння Клапейрона

$$P_1 \cdot \vartheta_1 = P_2 \cdot \vartheta_2 = P \cdot \vartheta = const.$$

- Адіабатний процес, який проводиться без теплообміну з навколишнім середовищем $dq = 0$. У цьому випадку $-C_W dT = Apd\vartheta$ і рівняння Клапейрона має вид

$$P \cdot \vartheta^K = const,$$

де K – показник адіабати, $K = 1,405$.

- Політропічний процес – процес функціонуючий у реальних умовах виробництва. Для цього процесу рівняння Клапейрона

$$P \cdot \vartheta^n = const,$$

де n – показник політропи.

9 Швидкість розповсюдження звуку у середах:

- рідини $C = \sqrt{\frac{E_P}{\rho}}$;
- газу $C = \sqrt{\frac{E_\Gamma}{\rho} \cdot K} = \sqrt{K \cdot \frac{P}{\rho}}$,

де P - тиск, $P = E_{\Gamma}$;

E_P і E_{Γ} - модулі об'ємної пружності відповідно рідини і газу.

10 Розчинність газів у рідинах.

Якщо до потоку рідини надходить зовнішнє повітря то воно розчинюється у рідині.

Відносний об'єм газу, що розчиняється у рідині до повного її насичення, визначається законом Генрі:

$$\frac{W_{\Gamma}}{W} = K \cdot \frac{P}{P_0},$$

де W - повний об'єм рідини;

W_{Γ} - об'єм розчиненого газу;

P - тиск;

K - коефіцієнт розчинності газу.

Якщо після повного насичення рідини газом зменшити тиск, то гази виділяються у виді бульбашок утворюючи механічну суміш газу з рідиною. Така суміш негативно впливає на якість функціонування пристроїв автоматики.

11 Сили зчеплення і капілярні сили.

Сили зчеплення виникають між молекулами рідини і газу на свобідній поверхні, або на поверхні контакту рідини (газу) з твердою стінкою. Взаємодія молекул рідини і твердої стінки трубки малого діаметра викликає явище капілярності. Якщо рідина змочує поверхню трубки, то висота піднімається, наприклад, для води на висоту меніска $h = 30/d$. Ртуть не змочує поверхню трубки і тому висота ртуті знижується на висоту $h = 10,15/d$. Це явище треба ураховувати при вимірах тиску п'езометрами і ртутними манометрами.

12 Кавітація – явище, яке виникає при розриві рідини і супроводжується різким хлопом та виділенням парів і газових бульбашок. Якщо ця

суміш попадає у зону високого тиску, то виникають ударні хвилі, які руйнують поверхню гідроагрегатів.

Ефект кавітації використовується у деяких технологічних процесах, наприклад, у ультразвуковому очищенні поверхні деталей.

1.1.2 Контрольні питання

- 1 Що таке густина і питома вага?
- 2 Що таке стисливість і пружність і якими параметрами вони характеризуються?
- 3 Що таке в'язкість? Якими коефіцієнтами характеризується в'язкість? Які одиниці виміру мають коефіцієнти в'язкості?
- 4 Як залежать від температури і тиску різноманітні властивості робочого середовища?
- 5 Чим відрізняються ньютонівська рідина від не ньютонівської?
- 6 Які окремі випадки термодинамічного процесу газу застосовуються у інженерній практиці?
- 7 У чому полягають явища розчинності газів у рідинах і капілярності?
- 8 Що таке кавітація?

1.2 Гідростатичний тиск

Гідростатичний тиск і його властивості, одиниці вимірювання. Розподіл гідростатичного тиску в об'ємі рідини відповідно диференціальним рівнянням Л. Ейлера.

Зміст теми викладений у літературі [1, с. 21-28; 2, с. 15-34; 6, с. 24-3].

1.2.1 Теоретичні відомості і рекомендації

Гідростатика – наука, яка окреслюється законами та умовами рівноваги рідини, яка знаходиться під дією прикладених сил, а також дію рідини на занурені тіла і обмежуючі стінки посудини. Спокій рідини може бути і відносним. У цьому випадку посудина з рідиною рухається вздовж завданого напрямку, або обертається навколо горизонтальної чи вертикальної осі. Якщо рідина знаходиться у стані спокою, то сили тертя відсутні і тому властивості в'язкості у законах гідростатики не враховуються, а використовуються наступні сили:

- Внутрішні масові сили, які пропорційні масі, і тому вони діють на усі частини рідини: сили тяжіння (об'ємні сили) і сили інерції. Сили інерції діють на рідину у стані відносного спокою.
- Поверхневі сили, які прикладаються на поверхню розділу рідини з газом або твердою стінкою. Поверхневі сили відносяться до зовнішніх сил.

У результаті дії внутрішніх і зовнішніх сил у об'ємі рідини виникає стискальна напруга, яка є гідростатичним тиском P . Гідростатичний тиск має наступні властивості:

- Сила тиску має напрям по нормалі до площини на яку вона діє.
- Гідростатичний тиск у кожній точці об'єму рідини однаковий у всіх напрямках і тому значення тиску у окремій точці залежить від координат розташування точки, тобто $P = f(x, y, z)$.

У системі МКГСС гідростатичний тиск має розмірність $кг/см^2$ (технічна атмосфера), а у СІ - $Н/м^2$ (Па – Паскаль), при цьому співвідношення

$$1 кг/см^2 = 9,81 \cdot 10^4 Н/м^2 \approx 10^5 Н/м^2 = 10 \text{ кПа (кілопаскаль)}$$

$$10 \text{ кПа} = 0,1 \text{ МПа (мегапаскаль)} = 1 \text{ бар} .$$

Гідростатичний тиск може змірюватися висотою стовпа рідини:

$$h = \frac{P}{\rho \cdot g} .$$

Співвідношення між h і P :

$$1 \text{ мм водяного стовпа} = 10^{-4} кг/см^2 = 9,81 Н/м^2 \approx 10 Н/м^2 ;$$

$$1 \text{ мм ртутного стовпа} = 13,595 \cdot 10^{-4} кг/см^2 \approx 136 Н/м^2 ;$$

$$1 кг/см^2 \approx 10^5 Н/м^2 = 10 \text{ м водяного стовпа} .$$

Розглянемо рівновагу рідини, яка знаходиться у стані спокою під дією об'ємних сил і гідростатичного тиску.

Виділимо у рідині довільний об'єм (рис. 1.2).

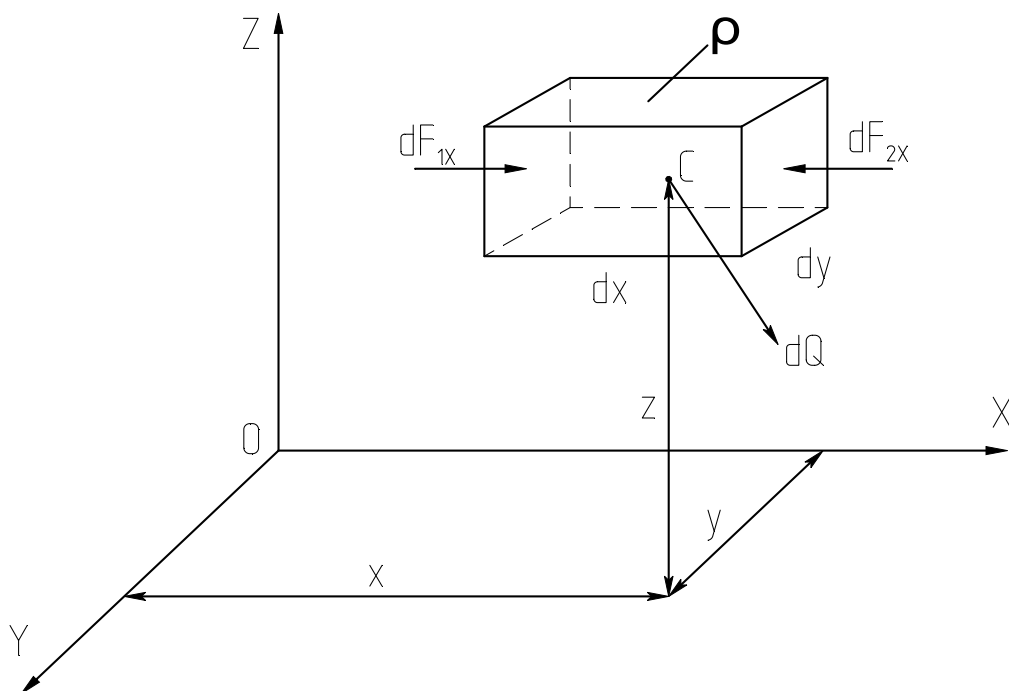


Рисунок 1.2 – Схема сил, які діють на довільний об'єм

Об'ємна (масова) сила – це сила ваги, сила інерції (наприклад, центр обіжна сила)

$$dQ = dM \cdot a,$$

де a - прискорення;

$$dM - \text{маса довільного об'єму, } dM = \rho \, dx \, dy \, dz.$$

Якщо позначити проекції об'ємної сили, яка діє на довільний об'єм при значенні маси $dM = 1$, через X , Y , Z , то ці проекції будуть мати розмірність прискорення:

$$X = 1 \cdot a_x; \quad Y = 1 \cdot a_y; \quad Z = 1 \cdot a_z,$$

де a_x, a_y, a_z - проекції вектора прискорення на вісі координат.

Довільний об'єм має масу dM і проекції об'ємної сили dQ на осі координат визначаються:

$$dQ_x = dM \cdot X = \rho \, dx \, dy \, dz \cdot X; \quad dQ_y = dM \cdot Y = \rho \, dx \, dy \, dz \cdot Y;$$

$$dQ_z = dM \cdot Z = \rho \, dx \, dy \, dz \cdot Z$$

Якщо, наприклад, при дії на рідину тільки сили ваги, яка спрямована вертикально вниз, проекції сил маса яких $dM=1$ набудуть значення:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

У центрі ваги паралелепіпеду діє тиск $P = f(x, y, z)$, тоді сили тиску на грані відносно вісі координат X визначаються:

$$dF_{1X} = (P - \Delta P) \, dy \, dz = \left(P - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \, dy \, dz;$$

$$dF_{2X} = (P + \Delta P) \, dy \, dz = \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \, dy \, dz.$$

Диференціальне рівняння сил, які діють на довільний об'єм вздовж вісі координат X :

$$F_{1X} - F_{2X} + dQ_x = 0$$

Після підстановки значень і перебудови рівняння прийме вид:

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) dydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) dydz + \rho dx dy dz \cdot X = 0;$$

$$\rho \cdot X - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Аналогічно можна записати диференціальні рівняння рівноваги відносно вісей координат Y і Z.

Тоді диференціальні рівняння Л.Ейлера (1755р.) набувають виду:

$$\begin{aligned} \rho \cdot X - \frac{\partial P}{\partial x} = 0, & \quad X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \rho \cdot Y - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, & \quad \text{або} \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \\ \rho \cdot Z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0, & \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Система диференціальних рівнянь дозволяє визначити закон розподілу гідростатичного тиску в об'ємі рідини.

1.2.2 Контрольні питання

- 1 Які сили діють на об'єм рідини, який знаходиться у стані спокою?
- 2 Що являє собою гідростатичний тиск?
- 3 Які властивості гідростатичного тиску?
- 4 Які розмірності гідростатичного тиску у системах МКГСС і СІ та їх співвідношення?
- 5 Якими рівняннями описується розподіл гідростатичного тиску в об'ємі рідини у стані спокою?
- 6 У чому полягає методика отримання рівнянь Л.Ейлера?

1.3 Основне рівняння гідростатики

Форма вільної поверхні рідини у стані спокою. Основне рівняння гідростатики. Абсолютний, надлишковий тиск і вакуум. Прибори для замірювання тиску. Закон Паскаля. Застосування основного закону гідростатики, відносний спокій рідини. Гідростатичний і п'єзометричний (надлишковий) напори, їх геометричний та енергетичний змісти.

Зміст теми викладений у літературі [1, с. 28-42; 2, с. 15-34; 6, с. 31-45].

1.3.1 Теоретичні відомості і рекомендації

Вільною поверхнею рідини називають межу яка ділить рідину в посудині з навколишнім середовищем. Ця поверхня є частковим випадком поверхні рівного тиску. Якщо перше рівняння Л.Ейлера помножити на dx , друге на dy , третє на dz , а потім скласти, то отримуємо:

$$\rho \cdot (Xdx + Ydy + Zdz) - \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) = 0,$$

де $Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$ - повний

диференціал потенціальної функції;

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = dP$$
 - повний диференціал тиску.

Тоді рівняння набуде виду

$$dP = \rho dU.$$

Це рівняння має назву основного диференціального рівняння гідростатики.

Для вільної поверхні рідини $P = const$, відповідно $dP = 0$ і $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, а $\rho \neq 0$. Прискорення межевої сили (сили ваги) у

проекціях на вісі координат: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$. З цих умов рівняння вільної поверхні

$$-gdz = 0.$$

Після інтегрування рівняння вільної поверхні рідини набуде виду

$$Z = const.$$

Тобто вільна поверхня рідини є горизонтальною площиною.

Розглянемо у системі координат одиничний випадок застосування основного диференціального рівняння гідростатики. У посудині рідина знаходиться у стані спокою і на неї діють поверхневий тиск ($P_o > P_{ат}$) і сила ваги (рис. 1.3).

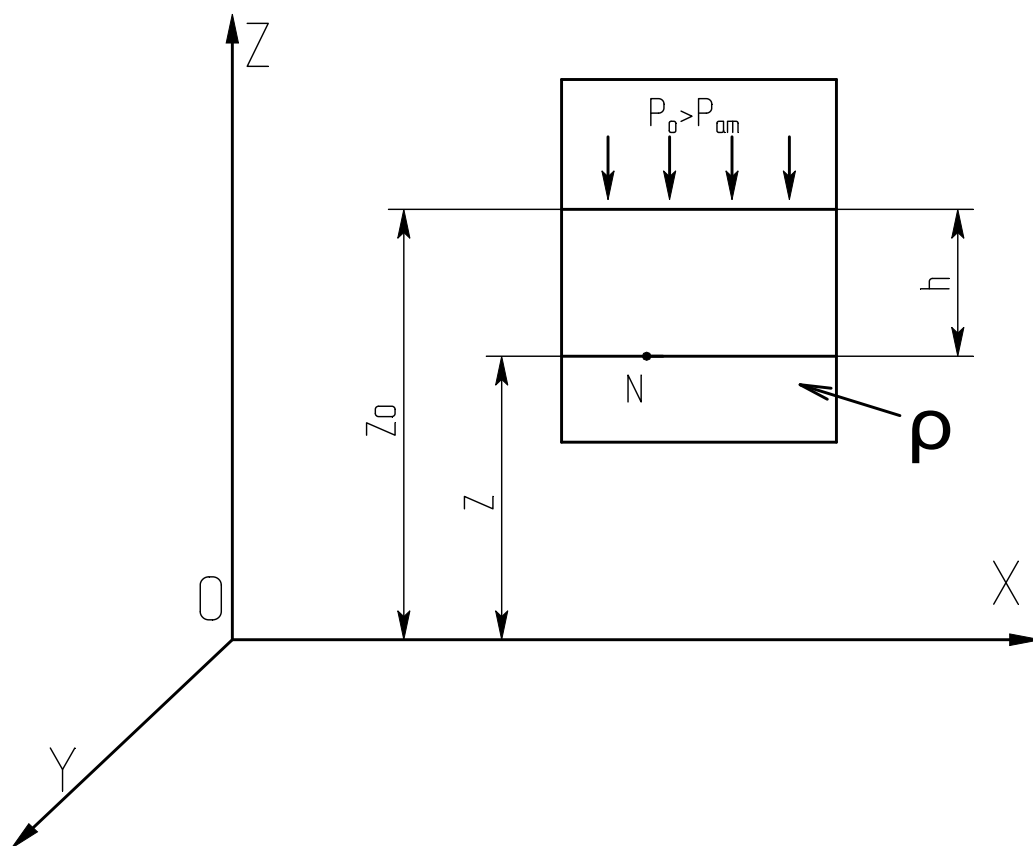


Рисунок 1.3 – Схема розміщення посудини

Визначимо абсолютний (повний) тиск на точку N, яка заглиблена у рідину на відстані h . Для цього випадку проекції прискорення на вісі координат: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$.

Тоді диференціальне рівняння набуде виду

$$dP = -\rho \cdot g dz,$$

$$\frac{dP}{\rho \cdot g} + dz = 0.$$

Після інтегрування одержимо

$$\frac{P}{\rho \cdot g} + z = C.$$

Постійну інтегрування C визначимо із граничних умов: при $Z = Z_0$ тиск $P = P_0$, тоді отримуємо рівняння:

$$\frac{P}{\rho \cdot g} + z = \frac{P_0}{\rho \cdot g} + z_0 = H_{II} = const;$$

$$P_{абс} = P_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 - z);$$

$$P_{абс} = P_0 + \rho \cdot g \cdot h,$$

де H_{II} - гідростатичний напір, який являє собою суму геометричного

Z напору і напору тиску $\frac{P}{\rho \cdot g}$.

Останнє рівняння називають основним рівнянням гідростатики для частого випадку. Абсолютний (повний) тиск складається із тиску на вільну поверхню P_0 , який передається усім частинкам об'єму рідини однаково, і тиску ваги стовпа рідини $\rho \cdot g \cdot h$.

Надлишковий (манометричний) тиск

$$P_H = P_{абс} - P_{ат},$$

де $P_{ат}$ - атмосферний тиск.

Тиск вакууму (наприклад, вакуум виникаючий в устаткувальному трубопроводі насоса об'ємного типу)

$$P_{вак} = P_{ат} - P_{абс}.$$

Розрахуємо абсолютні значення тиску у трьох точках об'єму рідини, яка знаходиться в посудині у стані спокою (рис. 1.4).

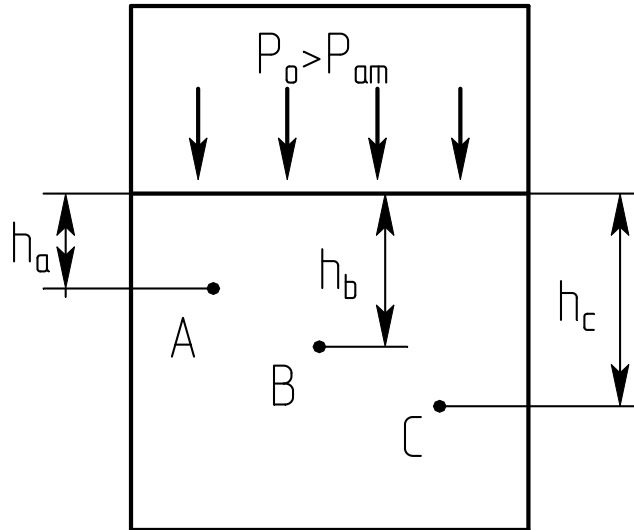


Рисунок 1.4 – Схема розміщення точок у об'ємі рідини

Абсолютні значення тисків

$$P_A = P_o + \rho \cdot g \cdot h_A,$$

$$P_B = P_o + \rho \cdot g \cdot h_B,$$

$$P_C = P_o + \rho \cdot g \cdot h_C.$$

Із першого рівняння визначимо

$$P_o = P_A + \rho \cdot g \cdot h_A.$$

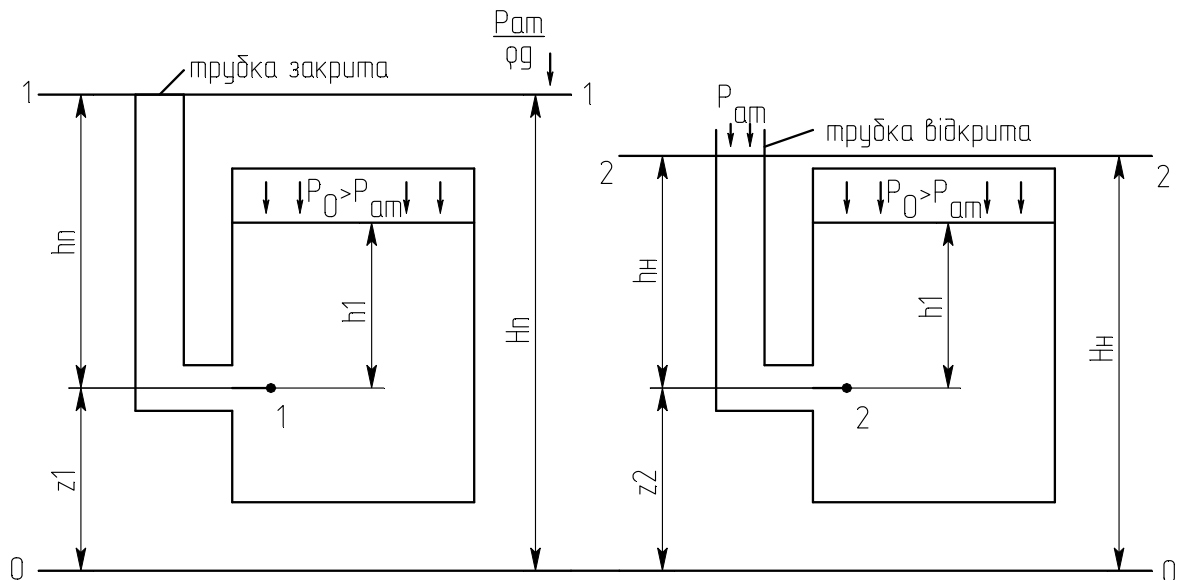
Після підстановки абсолютне значення тиску

$$P_B = P_A + \rho \cdot g \cdot (h_B - h_A),$$

$$P_C = P_A + \rho \cdot g \cdot (h_C - h_A).$$

Нехай із будь яких обставин тиск в точці А змінився на $\pm \Delta P_A$. На значення $\pm \Delta P_A$ зміняться і абсолютні тиски у точках В і С. Ці розрахунки визначають закон Паскаля: зміна тиску у будь якій точці об'єму рідини передається всім частинкам об'єму однаково. Зовнішній тиск прикладений до вільної поверхні рідини також відповідно закону Паскаля передається всім частинкам об'єму за будь якими напрямками однаково.

Розглянемо геометричний зміст напорів (рис. 1.5).



- 00 – площина порівняння;
- 11 – площина гідростатичного напору;
- 22 – площина надлишкового напору.

Рисунок 1.5 – Схема геометричного змісту напорів

Рівняння рівноваги тисків у точці 1

$$\rho \cdot g \cdot h_n = P_o + \rho \cdot g \cdot h_1 = P_{abc}$$

Таким чином закрита трубка без наявності у ній повітря змірює абсолютний тиск у точці 1. Сума геометричних висот $z_1 + h_n$ є гідростатичний (повний) напір H_{II} .

Рівняння рівноваги тисків у точці 2

$$P_{am} + \rho \cdot g \cdot h_n = P_o + \rho \cdot g \cdot h_2 = P_{abc},$$

$$\rho \cdot g \cdot h_n = P_{abc} - P_{am}.$$

Відкрита трубка (п'езометр) змірює надлишковий тиск у точці 2. Сума геометричних висот $z_2 + h_n$ носить назву надлишкового (манометричного) напору H_H .

Отримані значення H_{Π} і H_H однакові для всіх точок об'єму однорідної рідини. Енергетичний зміст напорів H_{Π} і H_H полягає у наступному. Потенціальна енергія рідини вагою G визначається

$$E = G \cdot (z_1 + h_n) = G \cdot \left(z_1 + \frac{P_{абс}}{\rho \cdot g} \right).$$

Питома потенціальна енергія сили

$$\delta\varepsilon = \frac{E}{G} = z_1 + h_n = z_1 + \frac{P_{абс}}{\rho \cdot g} = H_{\Pi}.$$

Таким чином гідростатичний напір являє собою суму питомих потенціальних енергій положення Z і тиску $\frac{P}{\rho \cdot g}$.

Абсолютний тиск визначається сумою надлишкового (манометричного) тиску і атмосферного тиску.

$$P_{абс} = P_H - P_{ат}.$$

Манометричний (надлишковий) тиск вимірюється п'єзомерами, ртутними і механічними манометрами.

Атмосферний тиск вимірюється барометрами. В інженерних розрахунках атмосферний тиск приймають рівним $1 \text{ кг/см}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 = 9,81 \text{ кПа}$, що відповідає атмосферному тиску на висоті 200м над рівнем моря, створеному стовпом води заввишки 10м (технічна атмосфера).

Вакуум – це тиск менше атмосферного. Абсолютний тиск не може бути менше нуля, тому і вакуум не може бути глибшим атмосферного тиску, що дорівнює $1 \text{ ат} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$.

П'єзометр – тонкостінна скляна трубка діаметром 10...15 мм. Одним кінцем прибор приєднується до посудини в шару якої вимірюється надлишковий тиск рідини, а другий кінець трубки відкритий в атмосферу (рис. 1.6).

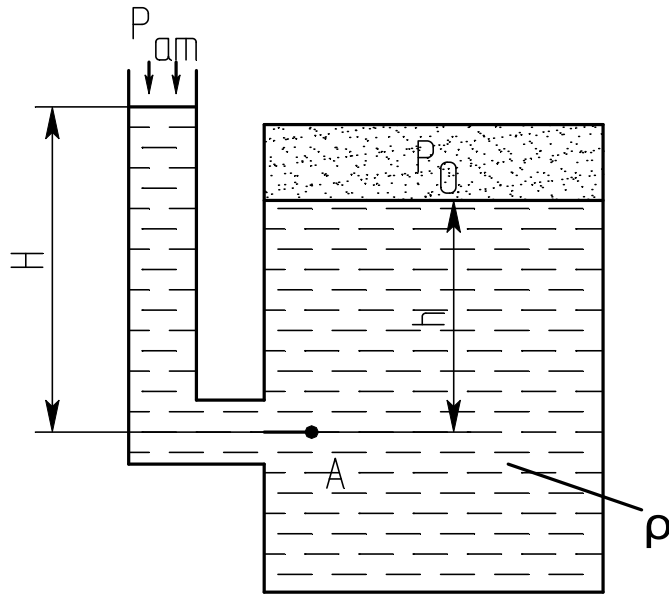


Рисунок 1.6 – Схема рідинного п'єзометра (манометра)

Рівняння тисків у точці А

$$P_0 + \rho \cdot g \cdot h = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot H = P_{abs};$$

$$H = \frac{P_{abs} - P_{atm}}{\rho \cdot g} = \frac{P_H}{\rho \cdot g},$$

де P_H - надлишковий (манометричний) тиск у точці А.

Якщо тиск, наприклад, у посудині менше атмосферного, то недостачу тиску до атмосферного називають вакуумом і змірюють його вакуумметром (рис. 1.7).

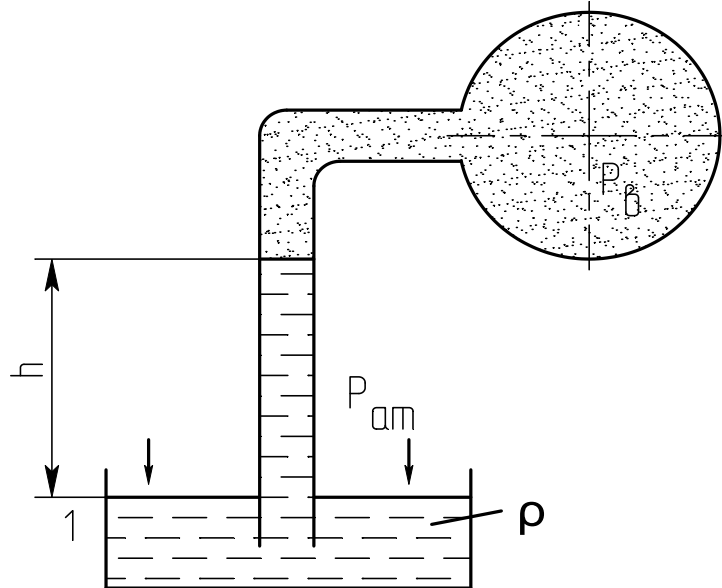


Рисунок 1.7 – Схема замірювання вакууму

Рівняння тисків відносно площини 1

$$P_{am} = P + \rho \cdot g \cdot h,$$

звідки

$$h = \frac{P_{am} - P}{\rho \cdot g} = \frac{P_B}{\rho \cdot g}.$$

Диференціальний манометр використовується для вимірювання різниці тисків у двох точках системи (рис. 1.8).

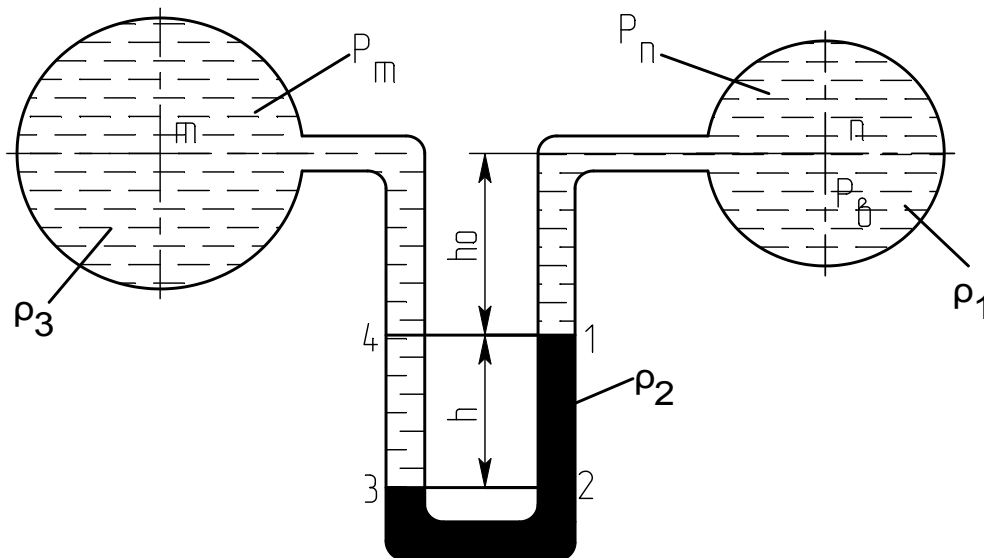


Рисунок 1.8 – Схема замірювання різниці тисків диференціальним манометром

Якщо змірю вальна трубка заповнена рідиною, яка має більшу густину $\rho_2 > \rho_1$ і $\rho_2 > \rho_3$, тоді рівняння тисків набудуть виду:

$$P_1 = P_n + \rho_1 \cdot g \cdot h_o,$$

$$P_2 = P_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h, \quad P_3 = P_2,$$

$$P_m = P_3 + \rho_3 \cdot (h + h_o).$$

Різниця тисків

$$\Delta P = P_m - P_n = g \cdot h_o \cdot (\rho_1 - \rho_3) + g \cdot h \cdot (\rho_2 - \rho_3).$$

Якщо $\rho_1 = \rho_3$, тоді

$$\Delta P = P_m - P_n = (\rho_2 - \rho_3) \cdot g \cdot h.$$

Чашковий ртутний манометр (вакуумметр) має чашку з великою площею перетину. Тому при замірюванні рівень рідини у чашці мало змінюється.

Рахункову лінію у цьому випадку звичайно вибирають співпадаючою з вільною поверхнею ртуті у чашці (рис. 1.9).

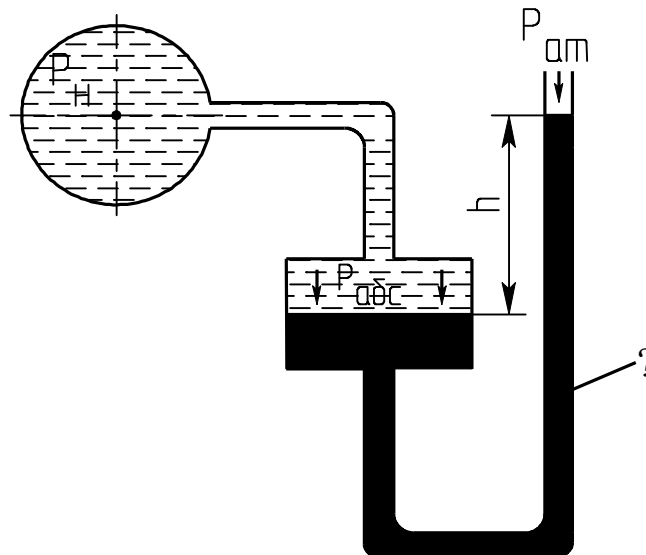


Рисунок 1.9 – Схема чашкового ртутного манометра

Абсолютний тиск на поверхні ртуті —

$$P_{абс} = P_{ам} + \rho \cdot g \cdot h,$$

а надлишковий тиск у посудині

$$P_H = P_{abc} - P_{am} = \rho \cdot g \cdot h .$$

Механічні манометри (вакуумметри) бувають з гнутою еліпсною трубкою і мембранною. Закритий кінець трубки через передаточний механізм передає рух стрілки. При наявності у трубці надлишкового тиску мала вісь еліпса збільшується, а велика – зменшується, а при вакуумі – навпаки. Це приводить до згину трубки і обертання стрілки.

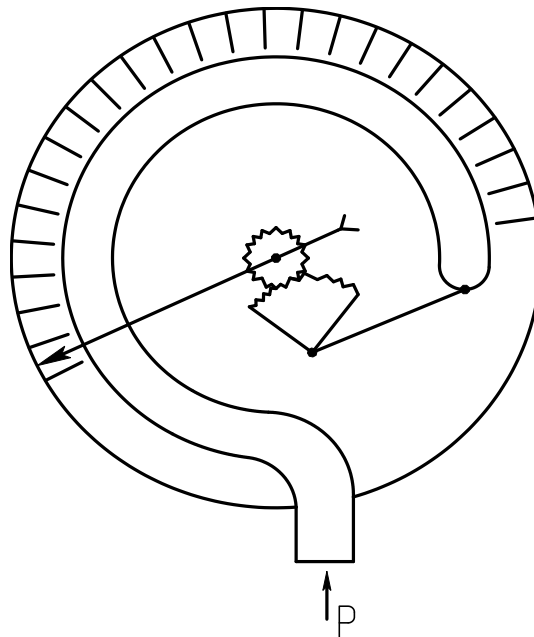


Рисунок 1.10 – Схема механічного манометра (вакуумметра)

Рідина знаходиться у стані відносного спокою якщо посудини з рідиною рухається у просторі відносно певної системи. Розглянемо рух посудини яка рухається горизонтально у якої рідина густиною ρ знаходиться у стані відносного спокою (рис. 1.11). Для цього застосуємо диференціальне рівняння Л.Ейлера (основне рівняння гідростатики):

$$dP = \rho \cdot dU = \rho \cdot (Xdx + Ydy + Zdz) .$$

Це рівняння дозволяє розрахувати тиск у будь-якій точці об'єму рідини.

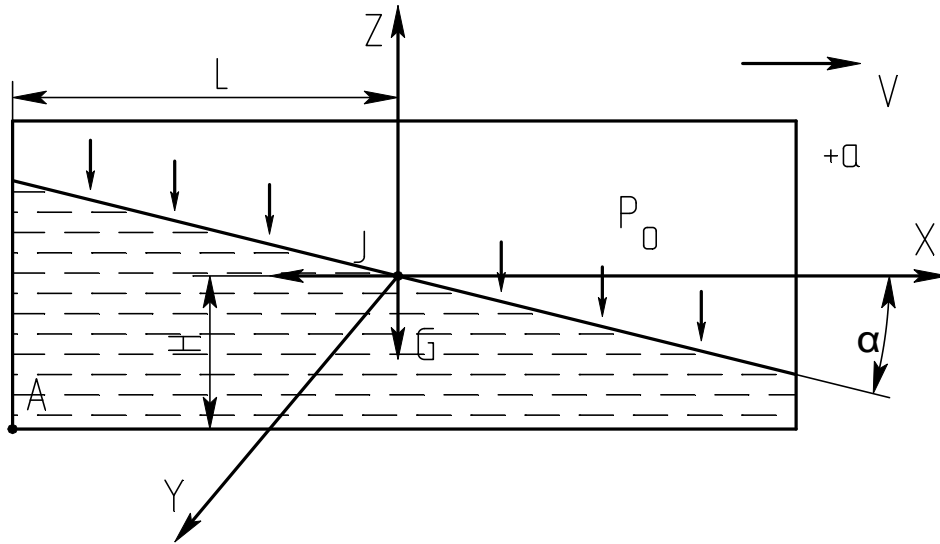


Рисунок 1.11 – Розміщення рідини у посудині, яка рухається горизонтально
Рівняння поверхні рівних тисків

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 .$$

На рідину діють сили інерції і сили тяжіння, які становлять проекції прискорень на вісі координат: $X = -a$, $Y = 0$, $Z = -g$.

Тоді отримуємо:

$$-adx - gdz = 0 \text{ і } dP = \rho \cdot (-adx - gdz) .$$

Інтегрування цього рівняння приводить до виразу:

$$P = \rho \cdot (-ax - gz) + C .$$

Початкові умови: при $X = 0$ і $Z = 0$ тиск $P = P_0$. Тоді постійна інтегрування буде мати вираз: $C = P_0$.

Абсолютний тиск у будь якій точці об'єму рідини

$$P_{abc} = P_0 + \rho \cdot (-ax - gz) .$$

Найбільший тиск буде у точці А на дні посудини при $X = -L$ і $Z = -H$.

$$P_A = P_0 + \rho \cdot (aL + gH) .$$

Рівняння поверхні рівного тиску після інтегрування набуде виду:

$$-ax - gz = 0 \text{ , або } -ax = gz .$$

Аналіз останнього рівняння показує, що для всіх точок рідини прискорення постійні, а вільна поверхня є площиною з кутом нахилу

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{x} = -\frac{a}{g}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{g}\right).$$

Розглянемо стан відносного спокою рідини посудини, яка обертається рівномірно навколо горизонтальної осі (рис. 1.12) при значній кутовій швидкості ω .

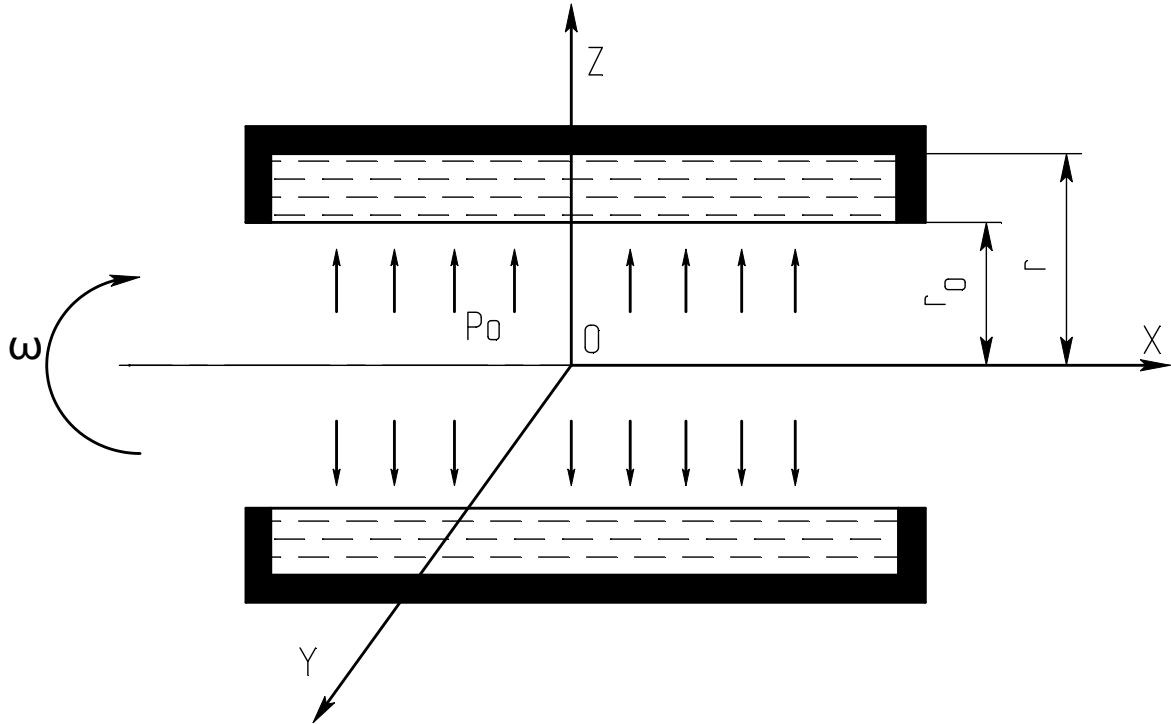


Рисунок 1.12 – Розміщення рідини у посудині, яка рухається навколо горизонтальної осі

Основне рівняння гідростатики

$$dP = \rho \cdot (Xdx + Ydy + Zdz).$$

При умовах значної кутової швидкості обертання посудини можна знехтувати силами тяжіння і тоді на об'єм рідини буде діяти тільки центр обіжної сила. Тоді проекції прискорення цієї сили на вісі координат набудуть значення:

$$X = 0; \quad Y = \omega^2 y; \quad Z = \omega^2 z.$$

Тоді основне рівняння гідростатики:

$$dP = \rho \cdot (\omega^2 y dy + \omega^2 z dz).$$

Після інтегрування:

$$P = \rho \cdot \left(\frac{w^2 y^2}{2} + \frac{w^2 z^2}{2} \right) + C.$$

Постійна інтегрування C визначається при наступних граничних умовах:
при $y = z = r_0$ тиск $P = P_0$.

Тоді

$$P_0 = \rho \cdot w^2 \cdot r_0 + C; \quad C = P_0 - \rho \cdot w^2 r_0^2;$$

$$P = \rho \cdot \left(\frac{w^2 y^2}{2} + \frac{w^2 z^2}{2} \right) + P_0 - \rho \cdot w^2 r_0^2.$$

Для радіуса r абсолютне значення тиску визначиться:

$$P_{абс} = P_0 + \rho \cdot w^2 \cdot (r^2 - r_0^2).$$

1.3.2 Контрольні питання

- 1 Як записати рівняння поверхні рівного тиску?
- 2 Що таке вільна поверхня рідини?
- 3 У чому полягають основне рівняння гідростатики та Закон Паскаля?
- 4 Як визначити гідростатичний (повний) і надлишковий напори? Їх геометричний і енергетичний змісти.
- 5 Які прилади застосовують для вимірювання різноманітних тисків?
- 6 Що собою являє відносний спокій рідини?
- 7 Як визначити рівняння вільної поверхні рідини і абсолютного тиску для різноманітних випадків відносного спокою рідини?

1.4 Практичне використання закону Паскаля

Умови рівноваги у сполучених посудинах. Розрахунок параметрів пристроїв побудованих на основі закону Паскаля (гідравлічний прес, мультиплікатор, гідроциліндр).

Зміст теми викладений у літературі [1, с. 49-51; 58-63; 2, с. 15-34; 6, с. 32-45].

1.4.1 Теоретичні відомості і рекомендації

Розглянемо дві сполучені посудини у які наліті дві рідини з різними густинами ρ_1 і ρ_2 (рис. 1.13), причому рідини знаходяться у стані спокою.

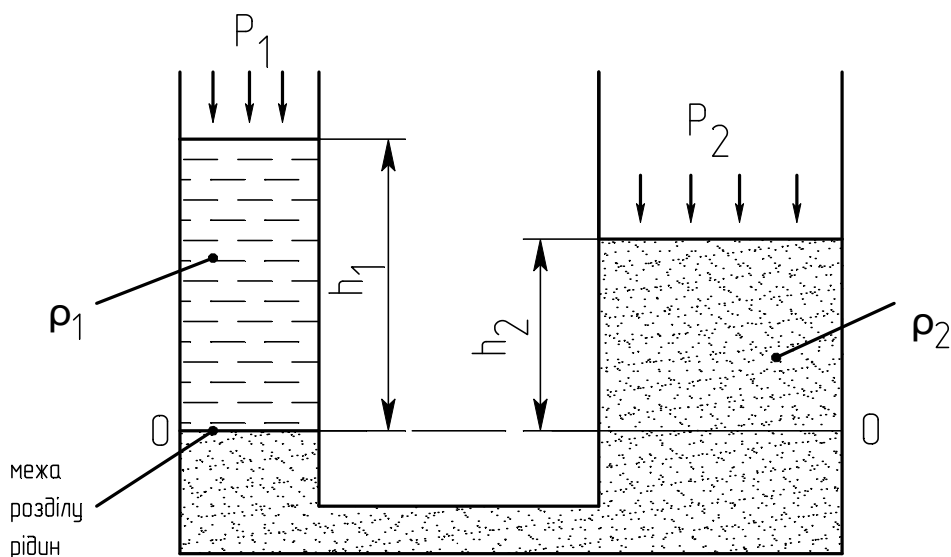


Рисунок 1.13 – Сполучені посудини

Рівняння тисків відносно межі розділу рідин 0 – 0

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 = P_2 + \rho \cdot g \cdot h_2,$$

$$P_2 - P_1 = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2),$$

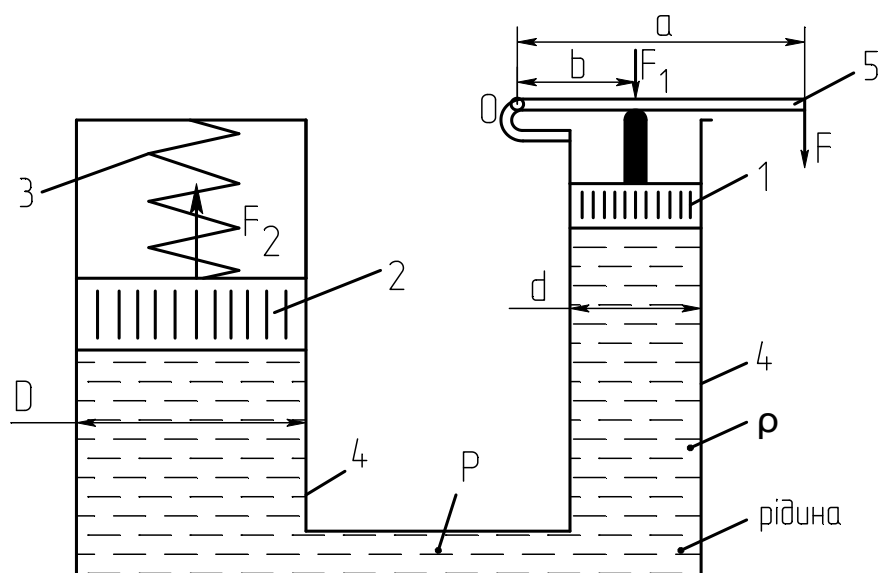
$$h_1 - h_2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho \cdot g}.$$

Тобто, різниця зовнішніх тисків на вільній поверхні рідин у сполучених посудинах визначається різницею висот стовпів рідин у посудинах.

Якщо $P_1 = P_2$ і $\rho_1 = \rho_2$, отримаємо $h_1 = h_2$.

Тобто, при умовах знаходження у сполучених посудинах рідини з однаковою густиною, на вільні поверхні яких діють однакові тиски, висоти стовпів рідин у посудинах будуть однакові.

Гідравлічний прес дає можливість перетворювати малі зусилля на значно більші. Звичайно мале зусилля прикладається до поршня, який має невеликий діаметр d , а на поршні з великим діаметром D виникає більше зусилля (рис. 1.14).



- 1 – поршень з малим діаметром;
- 2 – поршень з великим діаметром;
- 3 – пружина;
- 4 – циліндри;
- 5 – ричаг.

Рисунок 1.14 – Схема гідравлічного преса

Ідеальне значення зусилля яке діє на поршень

$$F_1 = F \frac{a}{b}.$$

Тиск, який створюється зусиллям F_1 :

$$P = \frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot d^2}.$$

Згідно законом Паскаля тиск P розповсюджується однаково у всіх напрямках і, звичайно, діє на поверхню поршня 2. Тоді на поршні 2 виникає ідеальне зусилля:

$$F_2 = P \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = F_1 \cdot \frac{D^2}{d^2}, \text{ або } \frac{F_2}{F_1} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Звичайно, тиски ваги стовпів рідини у циліндрах преса $\rho \cdot g \cdot h$ нехтуються за умови їх малості.

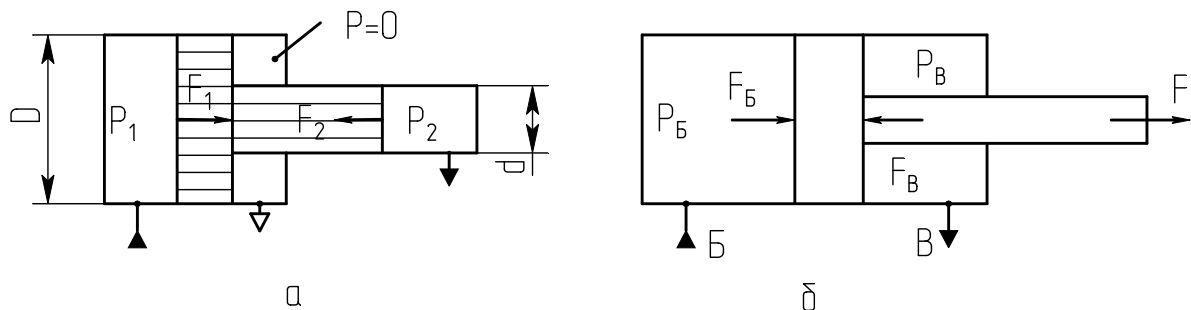
Тобто, зусилля, що створюються у великому і малому циліндрах гідравлічного преса прямо пропорційні площам торцевих поверхонь поршнів.

У кінематичних парах поршні – циліндри і у опорі ричала 5 виникають сили тертя, які враховуються коефіцієнтом корисної дії (ККД) – η_m . Тоді дійсне зусилля, яке створюється поршнем з великим діаметром D :

$$F_2 = F \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{D^2}{d^2} \eta_m,$$

де F – зусилля, яке прикладається до ричала 5.

Закон Паскаля використовується при розрахунках параметрів багатьох різноманітних гідравлічних і пневматичних пристроїв, наприклад, мультиплікаторів і гідро (пнемо) циліндрів (рис. 1.15).



а – мультиплікатор; б – гідро циліндр з однобічним розташуванням штока

Рисунок 1.15 – Схеми мультиплікатора і гідро циліндра

На основі розглянутих вище теоретичних положень параметри гідравлічних пристроїв розраховуються:

$$F_1 = P_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = F_2 = P_2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \text{ звідкіля ідеальне значення}$$

$$\text{тиску } P_2 = P_1 \cdot \frac{D^2}{d^2}.$$

$$F_B = P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}; \quad F_B = P_B \cdot \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4};$$

Ідеальне зусилля на штоку

$$F_{i0} = F_B - F_B = P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}.$$

Дійсне зусилля на штоку з урахування ККД

$$F = \left[P_B \cdot \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} \right] \eta_m,$$

де η_m - механічний ККД гідро циліндра.

1.4.2 Контрольні питання

- 1 Що собою являють сполучені посудини ?
- 2 Який вираз мають рівняння рівноваги рідини у сполучених рідинах ?
- 3 Як застосовується закон Паскаля для розрахунків параметрів гідравлічного преса ?
- 4 У чому полягає методика використання закону Паскаля для розрахунків параметрів гідравлічних і пневматичних пристроїв ?

1.5 Сили тиску на поверхні плоских і криволінійних стінок

Рівняння сили тиску на поверхню плоскої стінки, центр ваги поверхні і центр тиску, їх розміщення. Рівняння відстані центра тиску від центра ваги плоскої поверхні. Розрахунок сили тиску на циліндричну поверхню. Визначення тіла тиску і його розміщення. Епюри гідростатичного тиску.

Зміст теми викладений у літературі [1, с. 28-42; 2, с. 15-34; 6, с. 31-45].

1.5.1 Теоретичні відомості і рекомендації

Розглянемо закриту посудину, у якій знаходиться рідина густиною ρ . На вільну поверхню рідини діє тиск $P_o > P_{atm}$. У рідині під кутом α до вільної поверхні розташована плоска фігура. Для зручності на рисунку 1.16 похила площина (фігура) повернута навколо осі OY на кут 90° і проектується на площину XOy у натуральну величину.

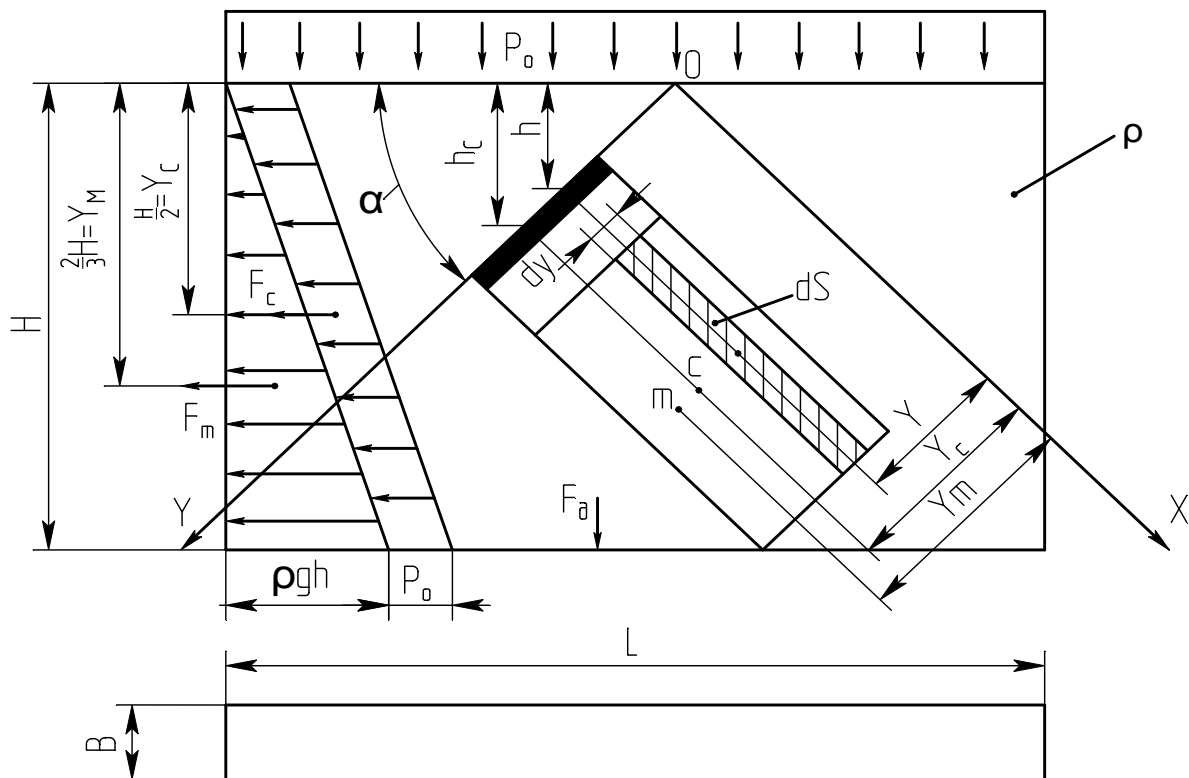


Рисунок 1.16 – Схема дії тиску рідини на плоску похилу поверхню

Для визначення загальної сили тиску на плоску поверхню фігури потрібно визначити елементарну силу тиску dF на нескінченно малу площадку dS , розташовану навколо точки з глибиною занурення під вільну поверхню рідини h .

Абсолютний гідростатичний тиск на центр ваги поверхні площадки визначиться:

$$A_{abc} = P_o + \rho \cdot g \cdot h$$

Елементарна сила тиску на нескінченно малу площадку

$$dF_{abc} = P_{abc} \cdot dS = (P_o + \rho \cdot g \cdot h)dS,$$

де h - глибина занурення центра ваги поверхні площадки у рідину,

$$h = y \cdot \sin \alpha.$$

Тоді отримуємо

$$dF_{abc} = (P_o + \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin \alpha)dS = P_o dS + \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin \alpha dS.$$

Сумарна абсолютна сила гідростатичного тиску рідини на плоску поверхню фігури розраховується:

$$F_{abc} = \int_S P_o dS + \int_S \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin \alpha dS = P_o \cdot S + \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \int_{\omega} y dS,$$

де S – площа поверхні фігури;

$\int_{\omega} y dS$ - статичний момент плоскої поверхні фігури відносно осі X ,

$$\int_S y dS = S \cdot y_C = S \cdot \frac{h_C}{\sin \alpha};$$

y_C - відстань центра ваги площі поверхні фігури відносно осі Y ,

$$y_C = \frac{h_C}{\sin \alpha};$$

h_C - глибина занурення у рідину центра ваги площі поверхні фігури.

Тоді абсолютна сила гідростатичного тиску рідини на поверхню плоскої фігури визначиться:

$$F_{abc} = P_o \cdot S + \rho \cdot g \cdot h_c \cdot S = (P_o + \rho \cdot g \cdot h_c) \cdot S$$

Тобто, сумарна абсолютна сила тиску рідини на поверхню плоскої фігури дорівнює добутку змоченої площі цієї поверхні на абсолютне значення тиску у її центрі тяжіння.

Якщо $P_o = P_{am}$, то сила надлишкового тиску рідини на поверхню плоскої фігури

$$F_H = F_{abc} - P_{am} \cdot S = P_{am} \cdot S + \rho \cdot g \cdot h_c \cdot S - P_{am} \cdot S = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot S.$$

Сила надлишкового тиску рідини на площу зануреної поверхні фігури дорівнює добутку тиску стовпа рідини над центром ваги площі поверхні фігури на площу усієї фігури.

Відповідно закону Паскаля тиск, який діє на вільну поверхню рідини, розповсюджується усім точкам об'єму рідини однаково у всіх напрямках. Тому сила тиску на поверхню плоскої фігури дорівнює $P_o \cdot S$ і ця сила прикладається у центрі ваги площі поверхні плоскої фігури.

Сила гідростатичного тиску від ваги рідини $\rho \cdot g \cdot h_c \cdot S$ прикладається у центрі тиску. Визначимо положення центра тиску на плоскій стінці із рівняння моментів рівнодіючої сили M_R і суми моментів складових сил M_C відносно осі X, при цьому:

$$M_R = M_C$$

Значення моментів розраховується наступним чином:

$$M_R = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot S \cdot Y_T,$$

де Y_T - відстань центра тиску від осі X.

Елементарний момент відносно осі X нескінченно малої площадки визначиться

$$dM = dF \cdot y = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS \cdot y = \rho \cdot g \cdot y^2 \cdot \sin \alpha \cdot dS,$$

де h – глибина занурення у рідину центра ваги площі площадки,

$$h = y \cdot \sin \alpha$$

Тоді момент складових сил елементарних площ плоскої фігури

$$M_C = \int_S dM = \int_S \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot y^2 \cdot dS = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \int_S y^2 dS,$$

де $\int_S y^2 dS$ - момент інерції площі поверхні плоскої фігури відносно

$$\text{осі } X, \int_S y^2 dS = I_X = I_C + S \cdot Y_C^2.$$

Рівняння моментів набуде виду:

$$M_R = M_C; \rho \cdot g \cdot h_C \cdot S \cdot Y_T = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot I_X; \sin \alpha = \frac{h_C}{Y_C};$$

$$\rho \cdot g \cdot h_C \cdot S \cdot Y_T = \frac{\rho \cdot g \cdot h_C \cdot I_X}{Y_C} = \frac{\rho \cdot g \cdot h_C \cdot (I_C + S \cdot Y_C^2)}{Y_C},$$

де I_C - момент інерції площі поверхні плоскої фігури відносно центра ваги цієї площі.

Відстань центра тиску від осі X

$$Y_T = Y_C + \frac{I_C}{S \cdot Y_C}.$$

Сили тиску на стінку і дно посудини визначаються:

$F_C = P_o \cdot S = P_o \cdot B \cdot H$, сила прикладена на відстані від вільної поверхні рідини до центру тяжіння площі, тобто $Y_C = H/2$;

$F_m = \rho \cdot g \cdot \frac{H}{2} \cdot S = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{H^2}{2}$, сила, яка діє на стінку і прикладена від вільної поверхні рідини на відстані

$$Y_T = Y_C + \frac{I_C}{S \cdot Y_C} = \frac{H}{2} + \frac{B \cdot H^3 \cdot 2}{12 \cdot B \cdot H \cdot H} = \frac{2}{3} H,$$

$F_o = (P_o + \rho \cdot g \cdot H) \cdot S = (P_o + \rho \cdot g \cdot H) \cdot B \cdot L$, прикладена до дна на відстані H.

Центр тяжіння площі Y_C і центр тиску Y_T співпадають, коли площина, на яку діє сила тиску розташована горизонтально, так як у цьому випадку момент інерції $I_C = 0$.

Сили тиску на дно посудин однакові при однакових площах дна S , густинах рідин і висотах рідин у посудинах, але вага рідини з посудинами створять різні реакції опор, на які опираються посудини (рис. 1.17). Це явище називають гідростатичним парадоксом.

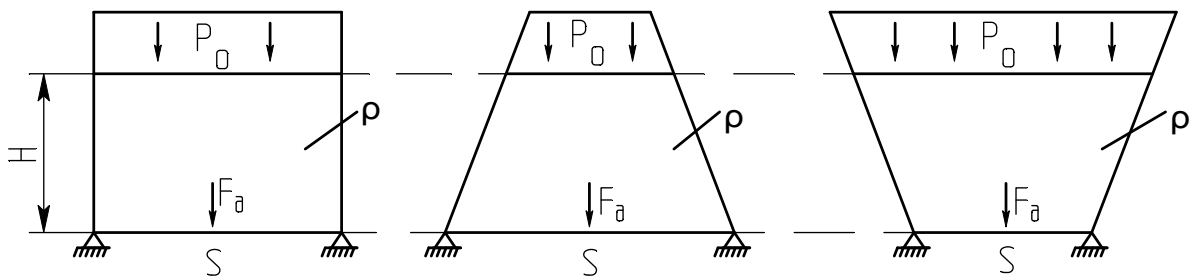


Рисунок 1.17 – Посудини з рідиною

Сила тиску на дно кожної посудини буде однакова і визначається:

$$F_d = (P_o + \rho \cdot g \cdot H) \cdot S .$$

Знаходження сили тиску рідини на поверхні (стінки) будь-якої форми зводиться до визначення трьох складових сил і трьох моментів. В інженерній практиці найбільш застосовуються циліндричні поверхні, які мають вертикальну площину симетрії. Сили тиску і рівнодіюча сила у цьому випадку лежать у площині симетрії.

Візьмемо циліндричну поверхню АВ посудини, яка перпендикулярна до площини рисунка 1.18.

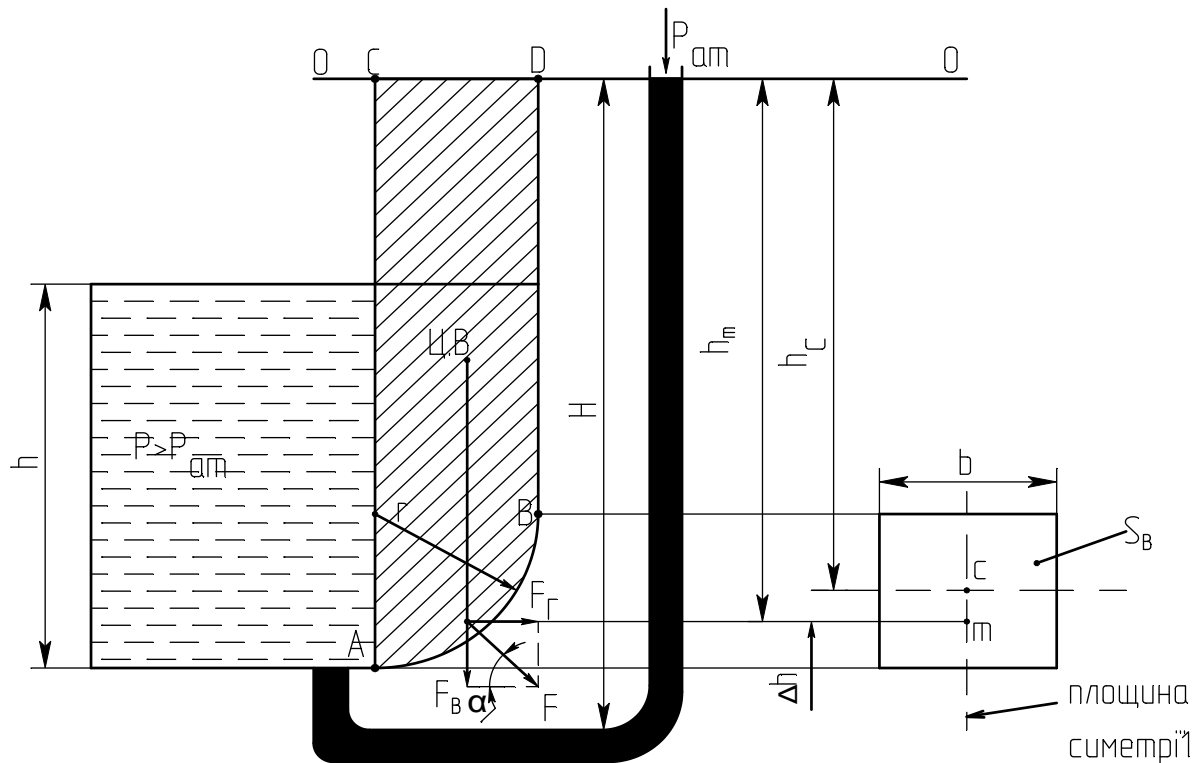


Рисунок 1.18 – Схема для розрахунку сили тиску на циліндричну поверхню

Сумарна сила Γ визначається по двом складовим: горизонтальній E_{Γ} і вертикальній E_B , а момент – по добутку моментів цих складових.

Горизонтальна складова сили тиску, яка сприймається циліндричною стінкою визначається:

$$F_{\Gamma} = \rho \cdot g \cdot h_C \cdot S_B,$$

де h_C - відстань від центра тяжіння вертикальної проекції до п'єзометричної поверхні OO ;

S_B - площа вертикальної проекції стінки.

Лінія дії сили F_{Γ} проходить через центр тиску вертикальної проекції стінки (точка m) і зміщена (вниз, якщо $h_C > 0$, або ввєрх, якщо $h_C < 0$) відносно центра тяжіння вертикальної проекції стінки на відстані

$$\Delta h = \frac{I_C}{S_B \cdot h_C},$$

де I_C - момент інерції площі вертикальної проекції стінки відносно горизонтальної осі, яка проходить через центр тяжіння проекції.

Відстань центра тяжіння від п'єзометричної площини ОО

$$h_m = h_C + \Delta h .$$

Вертикальна складова сили тиску, яка сприймається циліндричною поверхнею, дорівнює вазі рідини у об'ємі W_{ACDB} , визначається:

$$F_B = \rho \cdot g \cdot W_{ACDB} .$$

Сила F_B проходить через центр ваги об'єму W_{ACDB} (точка Ц.В) і направлена униз з моченої сторони стінки (якщо об'єм будується з не змоченої сторони стінки, то сила F_B направлена уверх). У даному випадку рідина знаходиться з моченою по поверхнею, а з не змоченою поверхнею тиск дорівнює атмосферному.

Сумарна сила тиску F на циліндричну стінку визначається як геометричний добуток сил F_G та F_B і дорівнює:

$$F = \sqrt{F_G^2 + F_B^2} .$$

Лінія дії сили F проходить через точку перетину ліній дії сил F_G та F_B .

Кут нахилу рівнодіючої сили до горизонту

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_B}{F_G} .$$

На рисунку 1.19 подано визначення горизонтальної і вертикальної складових і сумарної сили тиску на циліндричну симетричну стінку АВ у випадку наявності у посудині надлишкового тиску, а на рисунку 1.20 – у випадку наявності у посудині вакууму.

На рисунках зображені: АЕДВ – об'єм W тіла тиску; F_G та F_B - відповідно горизонтальна та вертикальна складові сумарної сили F ; точка Ц.В – центр ваги об'єму W ; b – ширина посудини; точка С – центр тяжіння вертикальної проекції циліндричної поверхні; точка m – центр тиску

вертикальної проекції циліндричної поверхні; h_c – глибина занурення центра тяжіння; Δh – відстань від центра тяжіння до центра тиску.

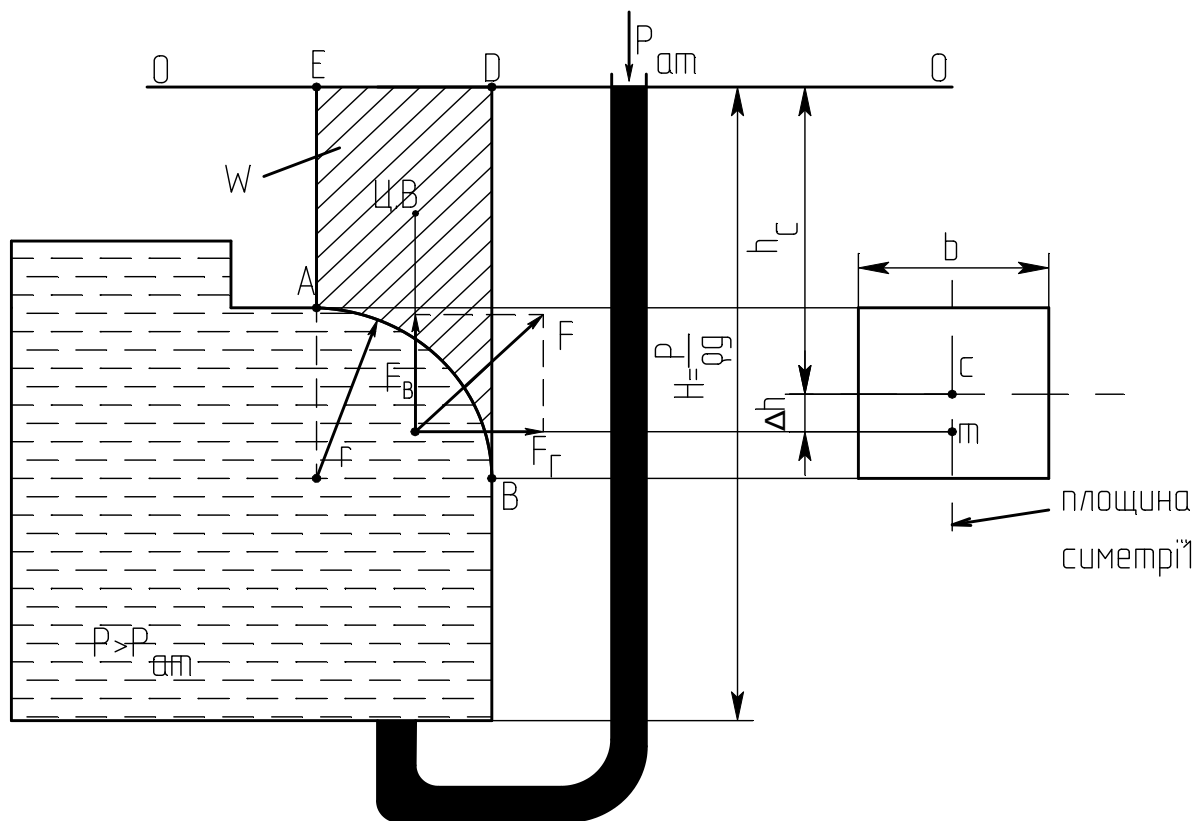


Рисунок 1.19 – Схема сил, які діють на циліндричну поверхню посудини, при тиску $P > P_{atm}$

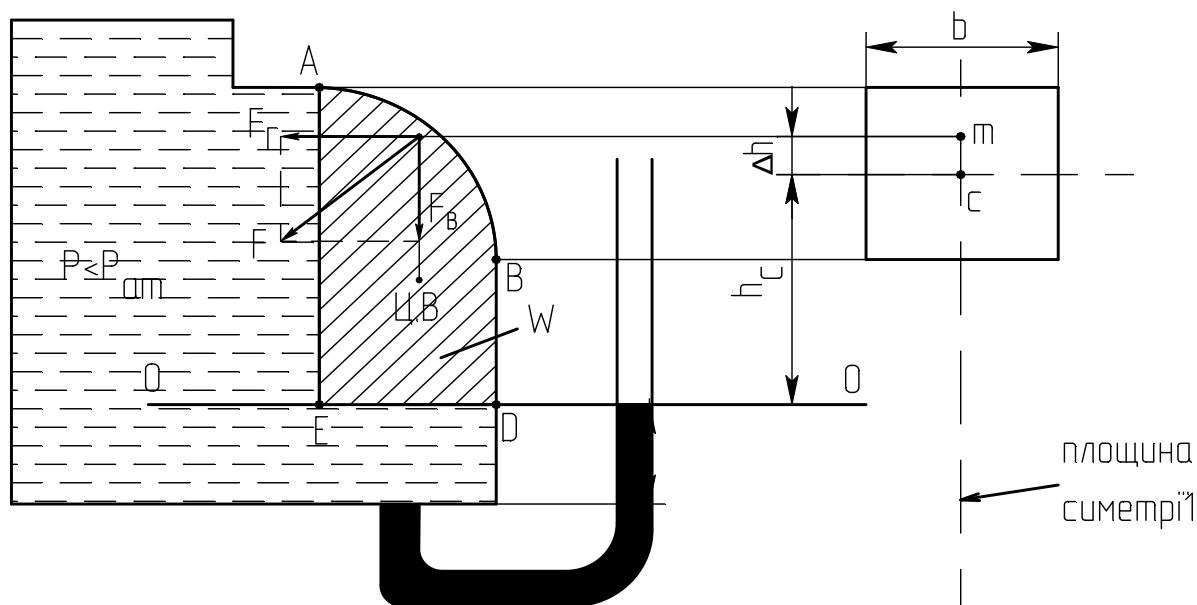


Рисунок 1.20 – Схема сил, які діють на циліндричну поверхню посудини, при тиску $P < P_{atm}$

У деяких випадках для розрахунку сумарної сили тиску доцільно розбити поверхню криволінійної стінки на окремі ділянки і визначити на них сили, а потім їх скласти. Так, наприклад, для визначення вертикальної складеної сили тиску на полу сферичну стінку abe (рис. 1.21) розділюють горизонтальною поверхнею на верхню ab і нижню be половини

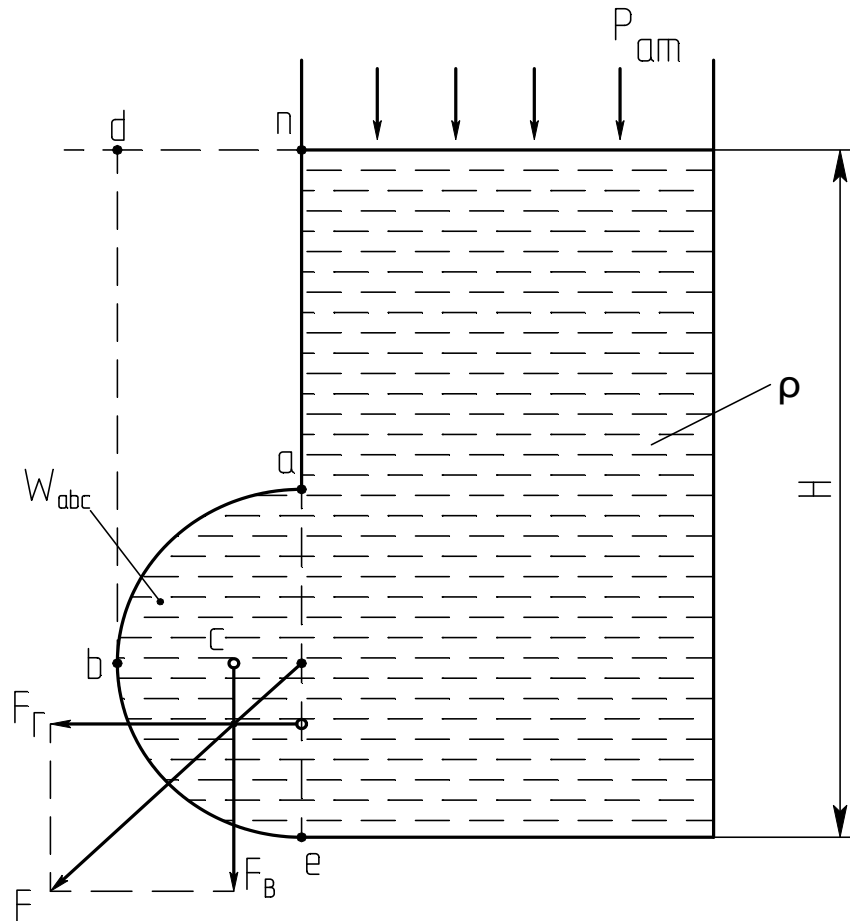


Рисунок 1.21 – Схема сил, які діють на полу сферичну поверхню

Вертикальна складова сили F_B , яка діє на стінку ab дорівнює вазі рідини у об'ємі $bdna$:

$$F_B^{ab} = \rho \cdot g \cdot W_{bdna}.$$

Ця складова направлена уверх.

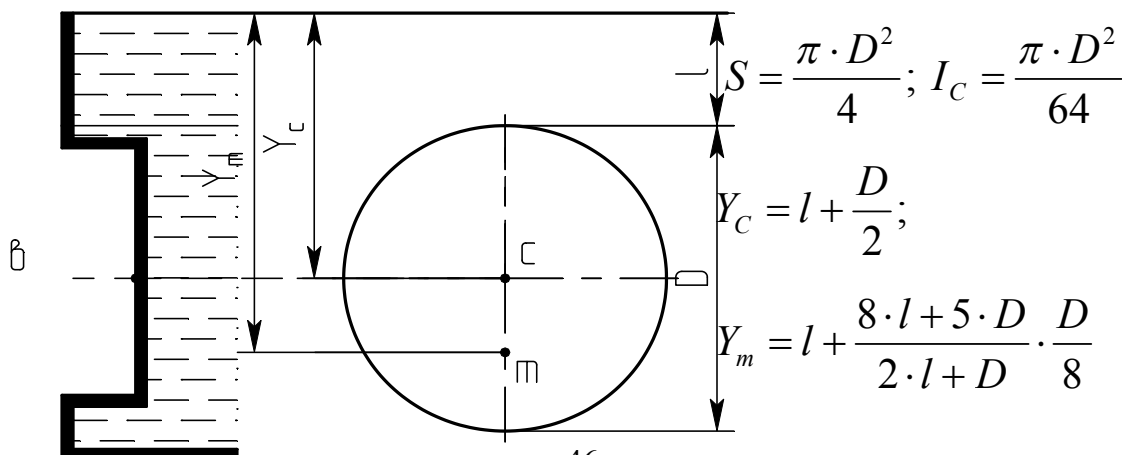
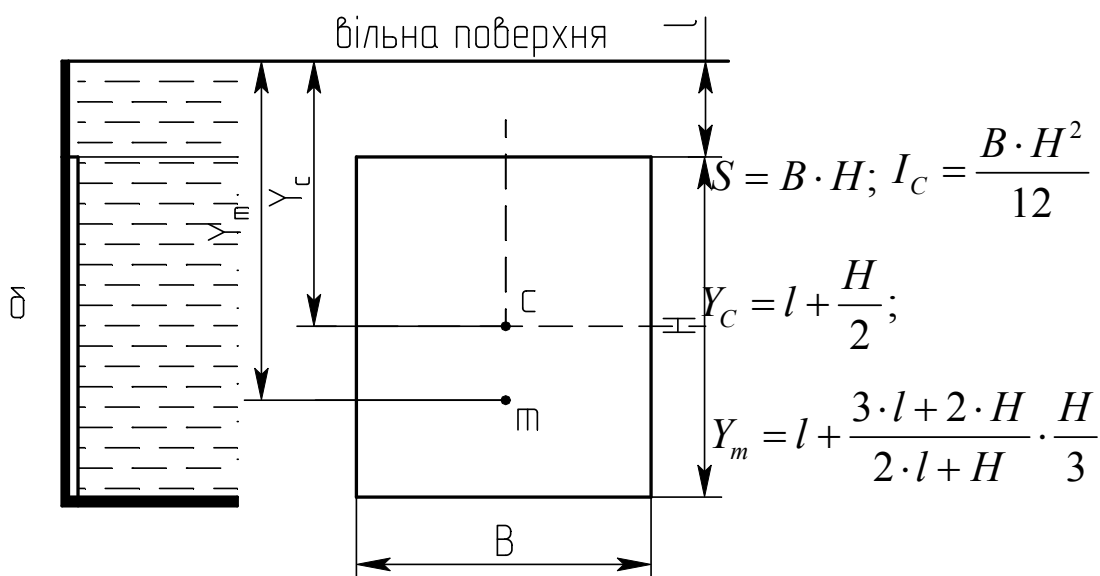
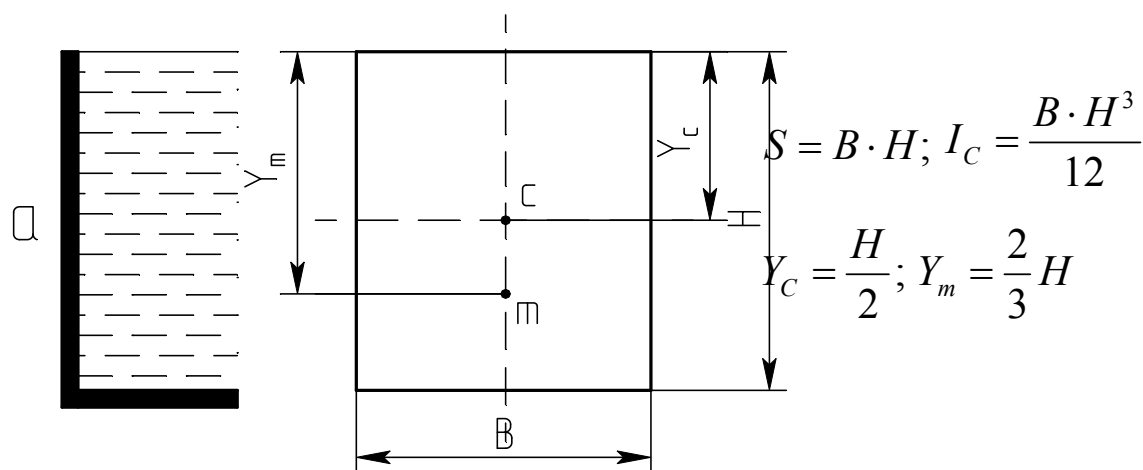
Вертикальна складова сили F_B , яка діє на стінку be направлена униз і дорівнює вазі рідини в об'ємі $bdne$:

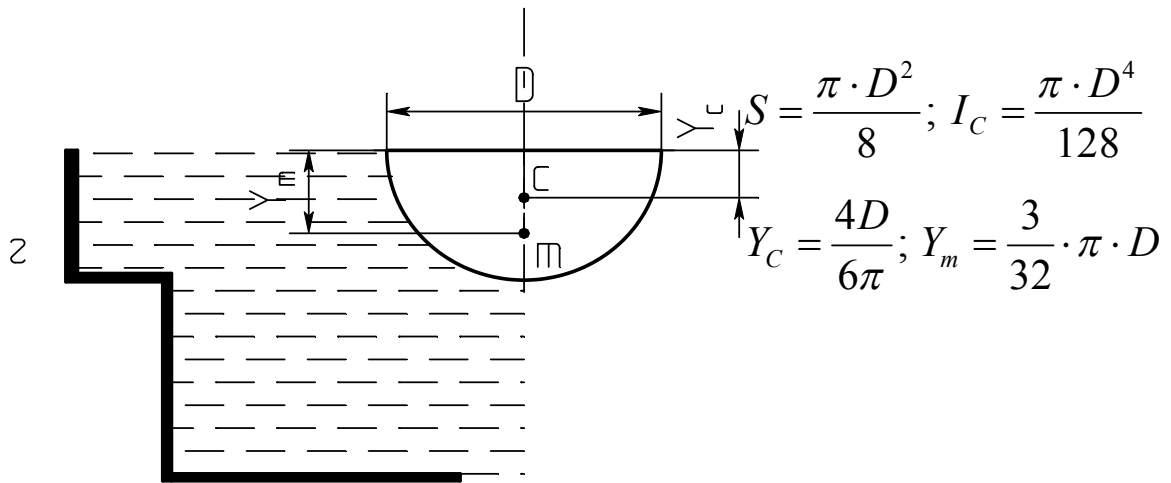
$$F_B^{be} = \rho \cdot g \cdot W_{bdne}.$$

Таким чином вертикальна сила тиску на всю полу сферу абе дорівнює різниці визначених складових сил і направлена униз:

$$F_B = F_B^{be} - F_B^{ab} = \rho \cdot g \cdot (W_{bdne} - W_{bdna}) = \rho \cdot g \cdot W_{abc}.$$

На рисунку 1.22 наведені залежності відстані від вільної поверхні рідини до центра тяжіння площини Y_C і центра тиску Y_m , а також площі стінки S і моменту інерції площі I_C





а – прямокутна стінка на рівні з вільною поверхнею;

б – занурена прямокутна стінка;

в – кругла занурена стінка;

г – стінка напівкруглої опори з діаметром на рівні з вільною поверхнею рідини

Рисунок 1.22 – Схема розташування параметрів фігур

Приклад.

Визначити сили тиску, які діють на плоску поверхню АВ і циліндричну поверхню MNK, та точки їх прикладення, якщо:

$$P_M = 0.05 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}; H = 1\text{м}; b = 2\text{м}; a = 0.5\text{м}; z = 1\text{м}; \rho = 1000 \frac{\text{кГ}}{\text{м}^3}; b = 1\text{м}$$

(рис. 1.23)

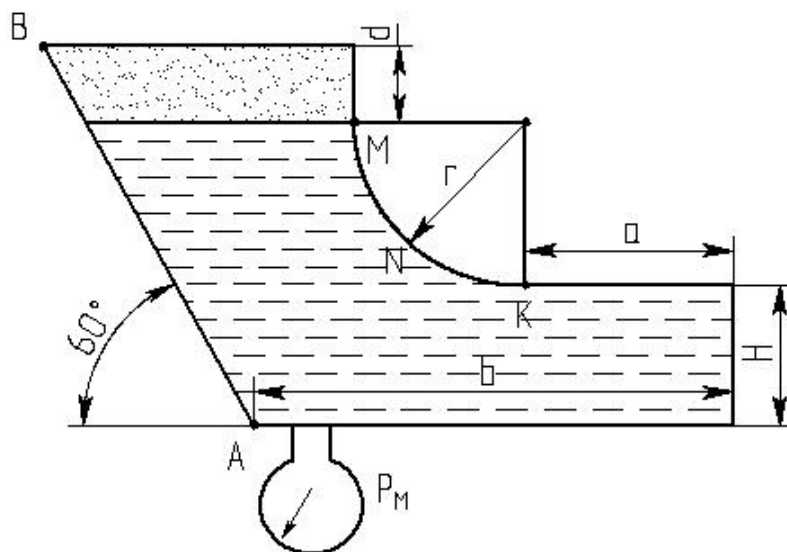


Рисунок 1.23 – Геометричні розміри посудини

На рисунку 1.24 наведена розрахункова схема.

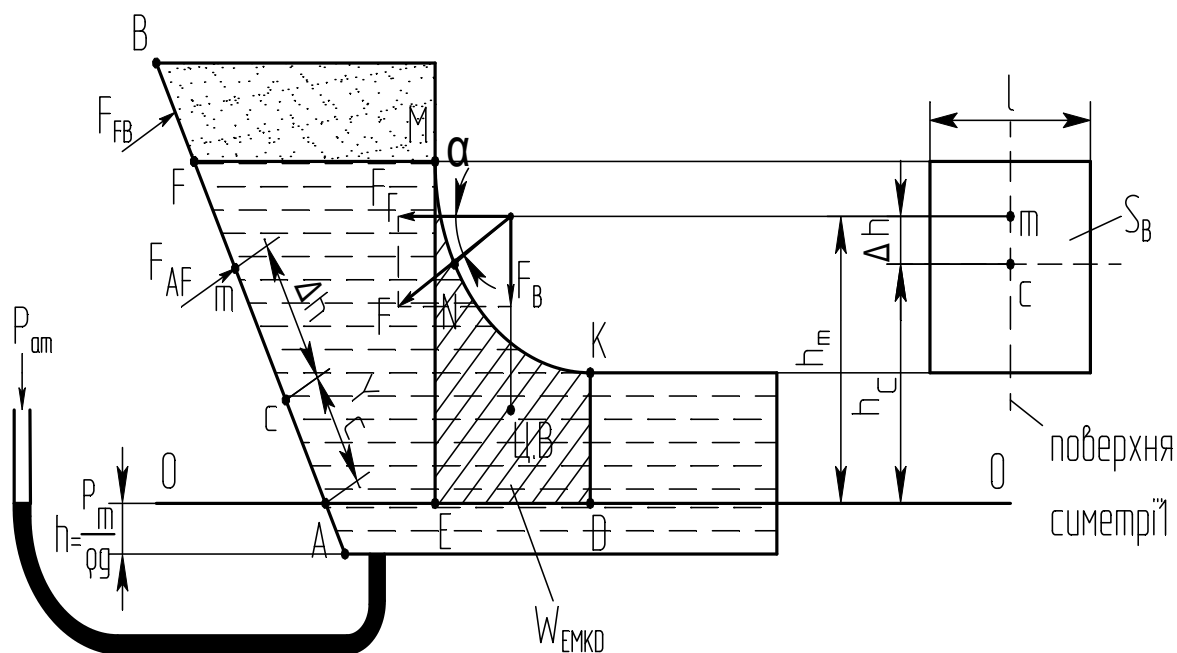


Рисунок 1.24 – Схема для розрахунку сил тиску

Сила тиску, що діє на поверхню АВ визначається як добуток сил, які діють на поверхні АF та FВ.

Сила, яка діє на поверхню АF:

$$F_{AF} = P_C \cdot S_{AF} .$$

де P_C - тиск у центрі тяжіння поверхні АF,

$$P_C = P_M - \rho \cdot g \cdot \frac{H+z}{2} = 0.05 \cdot 98100 - 1000 \cdot 9.81 \cdot \frac{1+1}{2} = -4905 \frac{H}{m^2}$$

$$\approx -0.05 \frac{кг}{см^2};$$

$$S_{AF} = l_{AF} \cdot l = \frac{H+z}{\sin 60^\circ} \cdot l = \frac{1+1}{\sin 60^\circ} \cdot 1 = 2.31 \text{ м}^2.$$

Тоді

$$F_{AF} = P_C \cdot S_{AF} = -4905 \cdot 2.31 = -1150 \text{ кг} = -10281.5 \text{ Н}.$$

Знак “-” позначає, що надлишкова сила направлена унур посудини.

Сила тиску на поверхню AF приложена у центрі тиску (точка m). Зміщення центру тиску відносно центра тяжіння (точка c) відбувається у сторону більших по абсолютній величині тисків.

Тоді

$$\Delta h = \frac{I_C}{Y_C \cdot S_{AF}} = \frac{1.025}{0.577 \cdot 2.31} = 0.77 \text{ м},$$

де I_C - момент інерції поверхні AF відносно центру ваги площі S_{AF} ,

$$I_C = \frac{l \cdot (H + z)^3}{12 \cdot \sin^3 60^\circ} = \frac{1 \cdot (1+1)^3}{12 \cdot \sin^3 60^\circ} = 1.025 \text{ м}^4;$$

Y_C - відстань центра ваги площі AF від п'єзометричної площини,

$$Y_C = \frac{H + z}{2 \cdot \sin 60^\circ} - \frac{P_M}{\rho \cdot g \cdot \sin 60^\circ} = \frac{(1+1)}{2 \cdot \sin^3 60^\circ} - \frac{0.05 \cdot 98100}{1000 \cdot 9.81 \cdot \sin 60^\circ} = 0.577 \text{ м}.$$

Сила тиску, яка діє на поверхню FB:

$$F_{FB} = P_F \cdot S_{FB} = -0.15 \cdot 98100 \cdot 0.577 = -8500 \text{ Н} = -866 \text{ кг},$$

де P_F - тиск у точці F, або у будь-якій точці поверхні FB,

$$P_F = P_M - \rho \cdot g \cdot (H + z) = 0.05 \cdot 98100 - 1000 \cdot 9.81 \cdot (1+1) = -0.15 \cdot 98100 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

S_{FB} - площа поверхні FB,

$$S_{FB} = \frac{a}{\sin 60^\circ} \cdot l = \frac{0.5}{\sin 60^\circ} \cdot 1 = 0.577 \text{ м}^2.$$

Сила F_{FB} прикладена у центрі тяжіння поверхні FB.

Горизонтальна складова сили, яка діє на вертикальну проекцію циліндричної поверхні

$$F_\Gamma = P_C \cdot S_B,$$

де P_C - тиск у центрі тяжіння вертикальної проекції,

$$P_C \cong \left[P_M - \rho \cdot g \cdot \left(H + \frac{z}{2} \right) \right];$$

S_B - площа вертикальної проекції циліндричної поверхні,

$$S_B = r \cdot l.$$

Тоді

$$\begin{aligned} F_\Gamma &= P_C \cdot S_B = \left[P_M - \rho \cdot g \cdot \left(H + \frac{z}{2} \right) \right] \cdot r \cdot l = \\ &= \left[0.05 \cdot 98100 - 1000 \cdot 9.81 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right] \cdot 1 \cdot 1 = -9810 \text{ Н} = -1000 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Вертикальна складова сили тиску

$$F_B = \rho \cdot g \cdot W_{EMKD} = -1000 \cdot 9.81 \cdot 0.715 = -7020 \text{ Н} = -715 \text{ кг},$$

де W_{EMKD} - об'єм тіла тиску,

$$\begin{aligned} W_{EMKD} &\cong \left[\left(H + z - \frac{P_M}{\rho \cdot g} \right) - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot z \right] \cdot r \cdot l = \\ &= \left[\left(1 + 1 - \frac{0.05 \cdot 98100}{1000 \cdot 9.81} \right) - \frac{1}{4} \cdot 3.14 \cdot 1 \right] \cdot 1 \cdot 1 = 0.715 \text{ м}^3. \end{aligned}$$

Знак “-” позначає, що надлишкова сила F_B , направлена унур посудини.

Сумарна сила тиску, яка діє на поверхню MNK, визначається як векторний добуток двох складових, тобто:

$$F = \sqrt{F_\Gamma^2 + F_B^2} = \sqrt{(-9810)^2 + (-7020)^2} = 12020 \text{ Н} = 1225 \text{ кг}.$$

Напрямок дії сили F визначається:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_B}{F_\Gamma} = \frac{7020}{4810} = 0,715.$$

Тобто кут $\alpha = 35^\circ 31'$.

1.5.2 Контрольні питання

- 1 Як визначити сумарну силу тиску на плоску поверхню?
- 2 Як розрахувати відстань центру тиску відносно центру тяжіння фігури?
- 3 Як визначити горизонтальну складову сили на криволінійну поверхню?
- 4 Чому дорівнює вертикальна складова сили на криволінійну поверхню?
- 5 Як визначити рівнодіючу силу на криволінійну поверхню?
- 6 Що собою являє об'єм тіла тиску?
- 7 Як визначається об'єм тіла тиску у випадку, коли п'єзометричний рівень розташований вище вільної поверхні рідини?
- 8 Як визначається об'єм тіла тиску у випадку, коли п'єзометричний рівень розташований нижче вільної поверхні рідини?

2 КІНЕМАТИКА І ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

2.1 Кінематика рідини і газу

Види руху робочого середовища. Основні поняття робочого середовища: лінія течії; трубка течії; елементарна струминка; потік робочого середовища; живий і нормальний переріз потоку; середня швидкість руху потоку; об'ємна, масова, і вагова витрати. Рівняння нерозривності (суцільності) потоку. Режими руху реальної (в'язкої) рідини потоку.

Зміст теми викладений у літературі [1, с. 80-91; 2, с. 34-54; 6, с. 74-88].

2.1.1 Теоретичні відомості і рекомендації

Кінематика рідини – це розділ гідравліки, який визначає види і форми руху рідини, не торкаючись питання про сили, які обумовили цей рух.

Швидкість руху, прискорення і тиск рідини у точках потоку залежать від положення точок, визначених координатами X , Y , Z . Крім цього, параметри, які характеризують рух рідини, залежать і від часу t . Тому можна визначити два виду руху рідини:

- 1 Усталений, коли швидкість руху, прискорення і тиск не залежать від часу і залишаються постійними на протязі всього часу руху рідини, тобто швидкість руху $U = f_1(x, y, z)$, прискорення $J = f_2(x, y, z)$ і тиск $P = f_3(x, y, z)$.

Усталений рух може бути:

- рівномірним, коли форма русла не змінюється по довжині потоку, наприклад, рух рідини у циліндричній трубці;
- нерівномірним, при якому змінюється поперечний переріз потоку, наприклад, рух рідини у конусній трубці.

2 Неусталений, коли параметри потоку змінюються за часом, при цьому

$$U = f_1(x, y, z, t); \quad J = f_2(x, y, z, t); \quad P = f_3(x, y, z, t), \quad \text{наприклад}$$

(рис. 2.1)

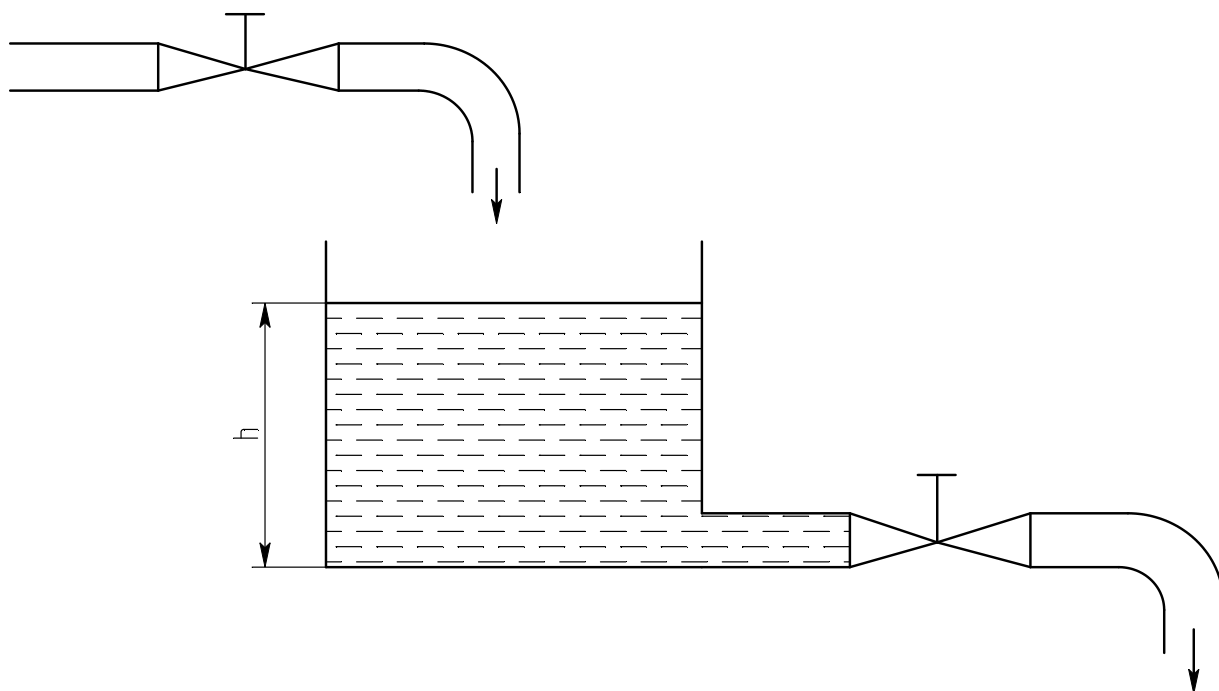


Рисунок 2.1 – Схема пристрою з неусталеним рухом рідини

Рух рідини може бути:

- напірним, коли рух рідини виконується за умовами різниці тисків;
- безнапірним, коли рух рідини виконується за умовами ваги рідини.

Потік рідини являє собою безперервний нерозривний рух рідини і обмеженій стінками довільної форми русла.

Потік рідини складається із окремих елементарних струмів – трубок.

Лінією течії називають лінію, у будь-якій точці якої у даній момент часу вектор швидкості рідини співпадає з напрямком дотичної до цієї лінії. При усталеному виді руху лінія течії співпадає з траєкторіями частинок рідини. Якщо навколо лінії течії побудуємо елементарний замкнутий контур і через усі точки контуру побудуємо лінії течії, то отримаємо трубку току, яка називається елементарною струминкою.

Елементарна струминка володіє наступними властивостями:

- при усталеному виду руху форма елементарної струминки не змінюється;
- частинки рідини із сусідніх струминок не можуть потрапити усередину даної струминки;
- за умовами нескінченно малого поперечного перерізу швидкості руху у всіх точках поперечного перерізу елементарної струминки будуть однаковими.

Об'ємною витратою рідини називають об'ємну кількість рідини, яка проходить у одиницю часу через живий переріз елементарної струминки.

$$dQ = \frac{dW}{dt} = \frac{dS \cdot dl}{dt} = dS \cdot U.$$

Живий переріз потоку

$$S = \int_S dS.$$

Об'ємна витрата потоку – є добуток об'ємних витрат елементарних струминок.

$$Q = \int_S dQ = \int_S U dS.$$

Про інтегрувати отримане рівняння неможливо тому, що визначити швидкість руху U у кожній елементарній струминці неможливо. З метою рішення цього питання використовують поняття середньої швидкості потоку у живому перерізі.

Тоді об'ємна витрата

$$Q = \int_S V dS = V \cdot S \frac{m^3}{c},$$

де V - середня швидкість потоку;

S - живий переріз потоку.

У інженерній практиці використовують поняття масової витрати $m = \rho \cdot Q$ та вагової витрати $G = \rho \cdot g \cdot Q$.

У елементарній струминці за час dt через живі перерізи 1 і 2 розраховуються витрати (рис. 2.2) наступними залежностями:

$$dQ_1 = U_1 dS_1,$$

$$dQ_2 = U_2 dS_2.$$

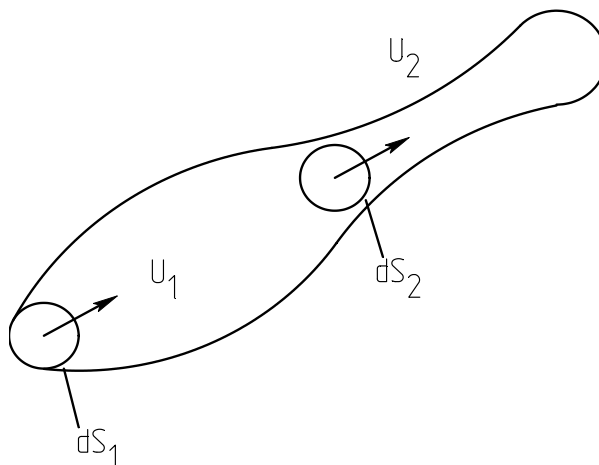


Рисунок 2.2 – Схема елементарної струминки

За умовами трьох властивостей елементарної струминки можна зробити висновок, що об'ємна витрата рідини через переріз 1 дорівнює об'ємній витраті рідини через переріз 2, тобто

$$dQ_1 = dQ_2,$$

$$U_1 dS_1 = U_2 dS_2 = const.$$

Останнє рівняння являє собою нерозривність потоку рідини у елементарній струминці.

Із рівняння нерозривності можна визначити:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{dS_2}{dS_1}.$$

Для цього потоку, який складається із багатьох елементарних струминок з застосуванням середньої швидкості руху:

$$Q = \int_{S_1} U_1 dS_1 = \int_{S_2} U_2 dS_2 = \int_{S_1} V_1 dS_1 = \int_{S_2} V_2 dS_2 = V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 = const$$

Отримане рівняння визначає нерозривність потоку.

Із рівняння об'ємної нерозривності потоку

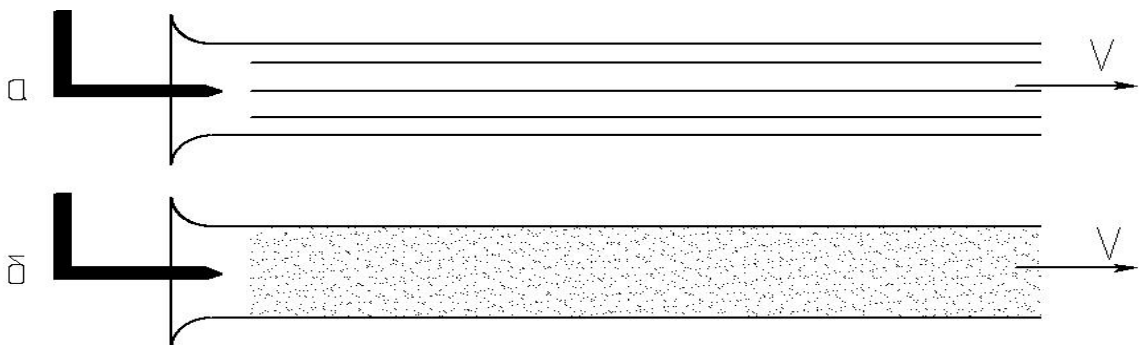
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Рівняння нерозривності потоку газу знаходиться у постійності масової витрати, тобто

$$m = \rho_1 \cdot Q_1 = \rho_2 \cdot Q_2 = const.$$

Дослідження, які були виконані Рейнольдсом, показали, що при русі через трубопровід реальної (в'язкої) рідини можуть виникати наступні режими руху (рис. 2.3):

- 1 Ламінарний (паралельно - струминний), при якому частинки рідини переміщуються вздовж русла паралельно. Цей режим виникає при невеликих швидкостях руху рідини і відповідає струминному руху.
- 2 Турбулентний (вихровий), при якому відбувається змішування часток рідини. Він виникає при значних швидкостях руху рідини. Частинки рідини переміщуються не тільки вздовж русла, а рухаються і в поперечному напрямку.



а – вид ламінарного руху; б – вид турбулентного руху

Рисунок 2.3 – Загальний вигляд режимів руху в'язкої рідини

При збільшенні швидкості руху рідини V ламінарний режим переходить у турбулентний.

Між ламінарним і турбулентним режимами руху в'язкої рідини знаходиться перехідна область. Ламінарний режим переходить у турбулентний при більших швидкостях руху, ніж швидкості руху, при яких турбулентний режим переходить у ламінарний.

Рейнольдом встановлен критерій (число), який дає змогу визначити наявність того чи іншого режиму руху.

Для потоку в'язкої рідини критерій (число) Рейнольда визначиться :

$$\text{Re} = \frac{V \cdot (4 \cdot R_{\Gamma})}{\nu},$$

де V - середня швидкість руху рідини;

ν - кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини;

R_{Γ} - гідравлічний радіус русла,

$$R_{\Gamma} = \frac{S}{\chi},$$

де S - площа поперечного перерізу русла;

χ - довжина змоченого периметра перерізу русла.

Для круглої циліндричної труби, яка має внутрішній діаметр d , повністю заповненої рідиною гідравлічний радіус буде визначатися наступною залежністю:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \quad \chi = \pi \cdot d; \quad R_{\Gamma} = \frac{S}{\chi} = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot \pi \cdot d} = \frac{d}{4}.$$

Тоді критерій (число) Рейнольда для циліндричного трубопроводу визначиться:

$$\text{Re} = \frac{V \cdot (4 \cdot \frac{d}{4})}{\nu} = \frac{V \cdot d}{\nu}.$$

Один режим руху рідини переходить у другий при визначеній швидкості руху. Ця швидкість руху називається критичною. Маються дві критичні швидкості руху:

- $V_{кр}^g$ - верхня критична швидкість руху, при якій ламінарний режим переходить у турбулентний;

- $V_{кр}^H$ - нижня критична швидкість руху, при якій турбулентний режим переходить у ламінарний.

Для круглих металевих циліндричних труб Критичні числа Рейнольда:

- якщо $Re = \frac{V \cdot d}{\nu} \leq 2200$, то відбувається перехід до ламінарного режиму;
- якщо $Re = \frac{V \cdot d}{\nu} \geq 2300$, то відбувається перехід до турбулентного режиму.

Перехідна область, коли $Re = 2200 - 2300$ у інженерній практиці не використовується за умовами того, що коефіцієнт опору руху рідини не стабільний.

Критичне число Рейнольда залежить від матеріалу і геометричних форм русла. Так, наприклад, для гнучких шлангів $Re_i^{кр} = 1600$, для каналів гідроапаратури $Re_i^{кр} = 550...750$.

2.1.2 Контрольні питання

- 1 Які існують види руху рідини і чим вони відрізняються?
- 2 Якими властивостями володіє елементарна струминка?
- 3 Як розрахувати об'ємну, масову і вагову витрати рідини?
- 4 У чому полягає рівняння нерозривності потоку рідини і газу?
- 5 Які існують режими руху в'язкої рідини і чим вони відрізняються?
- 6 Як визначити гідравлічний радіус русла і циліндричної труби?
- 7 Як розрахувати критерій (число) Рейнольда?

2.2 Динаміка рідини і газу

Диференціальні рівняння Л.Ейлера руху ідеальної рідини. Рівняння Д.Бернуллі для усталеного режиму руху ідеальної рідини. Геометричний і енергетичний змісти рівняння Д.Бернуллі. Рівняння Д.Бернуллі для потоку в'язкої рідини і газу, витрати напору (питомої енергії), гідравлічний уклон, коефіцієнт Каріоліса. Загальні відомості про гідравлічні витрати, їх різновид. Практичне застосування рівняння Д.Бернуллі.

Зміст теми викладений у літературі [1, с.107-134; 2, с. 34-54;6 ,с.88-113].

2.2.1 Теоретичні відомості і рекомендації

На основі другого закону Ньютона: добуток маси точки на її прискорення, яке вона отримала від дії зовнішньої сили, дорівнює модулю цієї сили, а напрямок прискорення співпадає з напрямком дії сили, розглянемо частинку рідини у вигляді паралелепіпеда з ребрами dx , dy , dz , що знаходиться у просторі заповненому рухомою рідиною. На рухомий, зі швидкістю U , паралелепіпед діють масові (об'ємні) сили і поверхневі сили, які викликані силами тяжіння і тиску.

Повторюючи розрахунки виконані у темі 1.2, знаходяться проекції питомих масових сил прискорення, масових (об'ємних) сил і поверхневих на відповідні координатні осі.

Виходячи із принципу Д'Аламбера, проекції всіх діючих на паралелепіпед сил будуть дорівнюватись нулю. На підставі розглянутого вище для одиниці маси паралелепіпеду ідеальної рідини можна записати наступні диференціальні рівняння Л.Ейлера:

$$\frac{dU_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{dU_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{dU_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Диференціальні рівняння опубліковані Л.Ейлером у 1755р.

Якщо для елементарної струминки ідеальної рідини, яка знаходиться в усталеному режимі руху, застосувати диференціальні рівняння Л.Ейлера, перемноживши перше рівняння на dx , друге - на dy , третє – на dz , а потім ці рівняння скласти, то будемо мати наступне:

$$\frac{dU_x}{dt} \cdot dx = X \cdot dx - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx,$$

$$\frac{dU_y}{dt} \cdot dy = Y \cdot dy - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy,$$

$$\frac{dU_z}{dt} \cdot dz = Z \cdot dz - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz.$$

$$\frac{dU_x}{dt} \cdot dx + \frac{dU_y}{dt} \cdot dy + \frac{dU_z}{dt} \cdot dz = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz -$$

$$- \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz \right);$$

Але

$$\frac{dx}{dt} = U_x; \quad \frac{dy}{dt} = U_y; \quad \frac{dz}{dt} = U_z.$$

Тоді отримаємо:

$$U_x dU_x + U_y dU_y + U_z dU_z = \frac{1}{2} \cdot d \cdot (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot (U^2),$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = dP,$$

$$\frac{1}{2} \cdot d(U^2) + \frac{1}{\rho} \cdot dP - d\mathcal{U} = 0,$$

де U - швидкість руху рідини у перерізі елементарної струминки;

\mathcal{U} - силова (потенціальна) функція;

P - тиск.

Якщо на рідину діє масова (об'ємна) сила тяжіння то силова (потенціальна) функція (у цьому випадку $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$)

$$d\mathcal{U} = -g \cdot dz.$$

Після підстановки будемо мати:

$$\frac{1}{2} \cdot d(U^2) + \frac{1}{\rho} \cdot dP + g \cdot dz = 0,$$

$$d \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot U^2 + \frac{P}{\rho} + g \cdot z \right) = 0.$$

Тобто після інтегрування:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g \cdot z = const.$$

Отримане рівняння віднесено до одиниці маси. Віднесемо це рівняння до одиниці ваги, для чого поділимо усі члени рівняння на g і тоді отримаємо рівняння Д.Бернуллі, яке опубліковано у 1738р.:

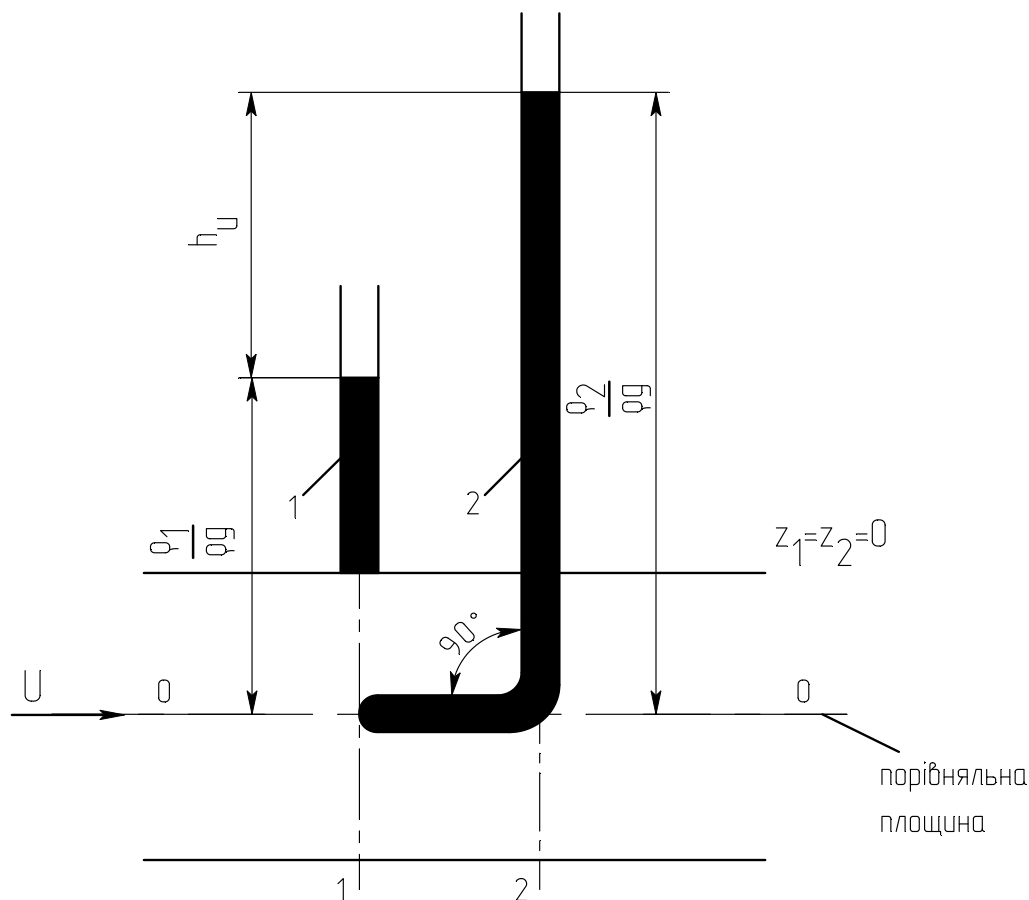
$$\frac{U^2}{2 \cdot g} + \frac{P}{\rho \cdot g} + z = const.$$

Для двох перерізів елементарної струминки:

$$\frac{U_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 = const.$$

Геометричний зміст рівняння Д.Бернуллі розкривається застосуванням прибору Прандтля, який складається із п'езометра і із гідродинамічної трубки Піто, які розташовуються у перерізі елементарної струминки.

Трубка Піто являє собою трубку, кінець якої зігнутий під кутом 90° , причому вхідний отвір трубки має менший діаметр (рис. 2.4).



1 – п'єзометр; 2 – трубка Піто

Рисунок 2.4 – Схема прибору Прандтля

Рівняння Д.Бернуллі для двох перерізів елементарної струминки і трубки Піто

$$\frac{U_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{U_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g}$$

Швидкість руху у трубці Піто відсутня, тому $U_2 = 0$.

Тоді рівняння прийме вид:

$$\frac{U^2}{2 \cdot g} = \frac{P_2}{\rho \cdot g} - \frac{P_1}{\rho \cdot g} = h_U$$

Звідки швидкість руху у конкретній точці живого перерізу визначиться:

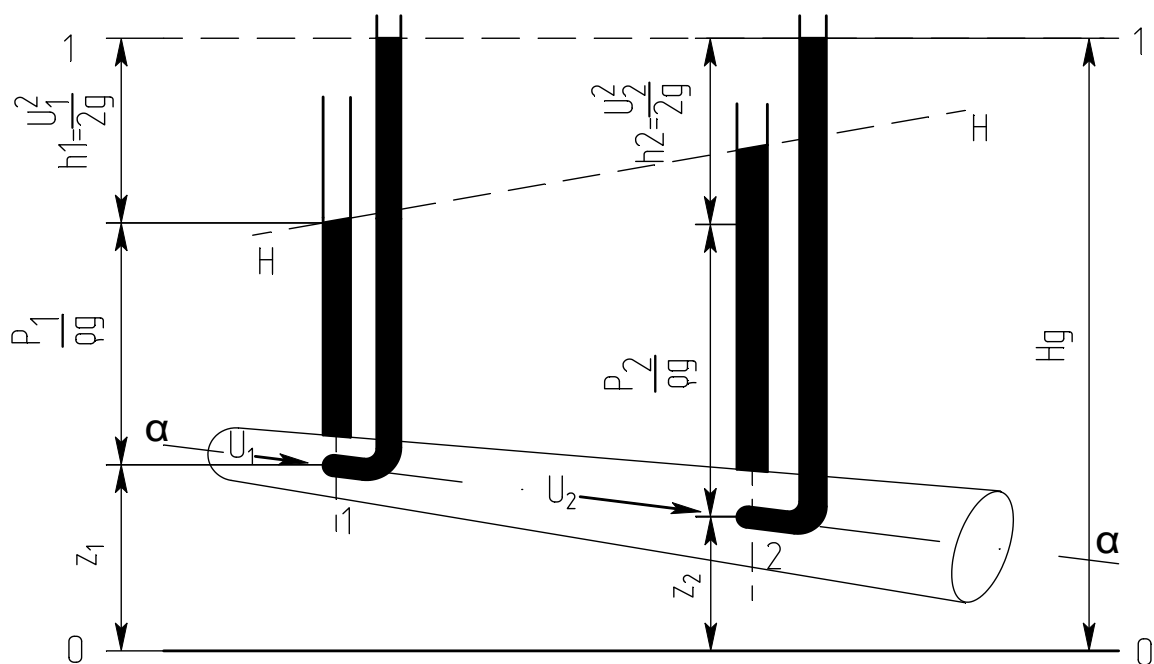
$$U = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_U}$$

Різниця висот h_U між гідродинамічною трубкою і п'єзометром має назву висоти швидкісного напору.

Таким чином геометричний зміст рівняння Д.Бернуллі полягає у наступному:

- перший член $\frac{U^2}{2 \cdot g}$ - швидкісна висота (швидкісний напір);
- другий член $\frac{P}{\rho \cdot g}$ - п'єзометрична висота (надлишковий напір);
- третій член z - геодезична висота (геометричний напір).

Сума членів рівняння Д.Бернуллі має назву гідродинамічного напору H_g (рис. 2.5).



1-1 – площина гідродинамічного напору;

н-н – лінія п'єзометричного (надлишкового) напору

Рисунок 2.5 – Геометричний зміст рівняння Бернуллі

Згідно з рисунком 2.5 рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини запишеться:

$$\frac{U_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 = H_g = \text{const.}$$

Нехай частинка рідини масою dm рухається по лінії течії $\alpha - \alpha$, наприклад, у живому перерізі 1 зі швидкістю U . На частинку діє тиск P . Повна енергія, яку має частинка, складається із кінетичної і потенціальної енергій.

Кінетична енергія:

$$K = \frac{dm \cdot U^2}{2}.$$

Потенційна енергія:

$$\Pi = dm \cdot g \cdot \frac{P}{\rho \cdot g} + dm \cdot g \cdot z.$$

Тоді повна енергія:

$$E = K + \Pi = \frac{dm \cdot U^2}{2} + dm \cdot g \cdot \frac{P}{\rho \cdot g} + dm \cdot g \cdot z.$$

Визначимо питому енергію якою володіє частинка одиничної ваги:

$$dE = \frac{E}{dm \cdot g} = \frac{U^2}{2 \cdot g} + \frac{P}{\rho \cdot g} + z.$$

Тобто фізичний (енергетичний) зміст рівняння Бернуллі полягає у наступному:

- перший член $\frac{U^2}{2 \cdot g}$ - питома кінетична енергія;
- другий член $\frac{P}{\rho \cdot g}$ - питома потенціальна енергія тиску;
- третій член z - питома потенціальна енергія положення.

Сума членів рівняння Бернуллі для даного живого перерізу елементарної струминки являє собою повну питому енергію рідини.

У інженерній практиці застосовуються реальні (в'язкі) рідини. В'язкість рідини утворює опір руху і обумовлює втрати енергії рідини при руху від живого перерізу 1 до перерізу 2 (рис. 2.5).

Тому

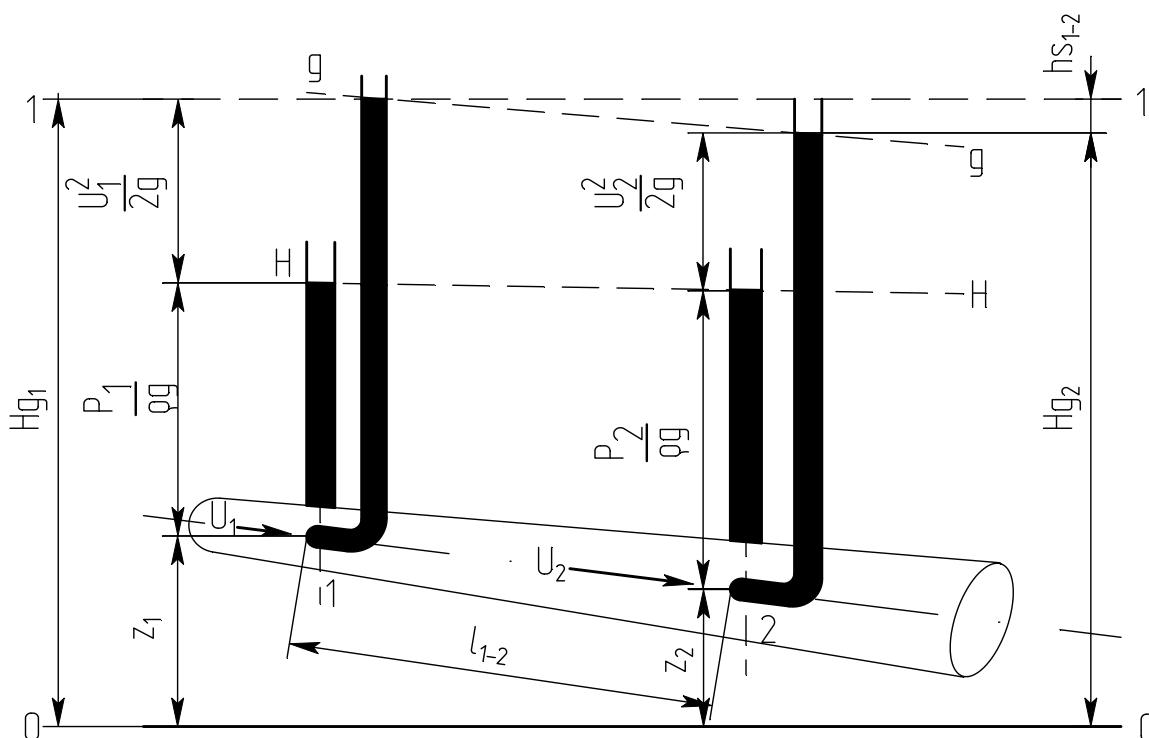
$$dE_1 > dE_2,$$

$$\frac{U_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 > \frac{U_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2,$$

$$\frac{U_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + h_{S_{1-2}},$$

де $h_{S_{1-2}}$ - висота гідродинамічного напору (повної) питомої енергії.

Геометричний зміст цього явища зображений на рисунку 2.6.



0-0 – порівняльна площина;

1-1 – площина гідродинамічного напору ідеальної рідини;

g-g – лінія гідродинамічного напору в'язкої рідини;

н-н – лінія п'єзометричного (надлишкового) напору

Рисунок 2.6 – Геометричний зміст процесу руху в'язкої рідини у елементарній струминці

Гідравлічним уклоном називають зниження гідродинамічного напору по довжині руху рідини.

$$I = \frac{h_{S_{1-2}}}{l_{1-2}} = \frac{\left(\frac{U_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 \right) - \left(\frac{U_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 \right)}{l_{1-2}}$$

П'езометричним напором називають зниження питомої потенціальної енергії по довжині руху рідини.

Потік рідини складається із сукупності елементарних струминок. Тоді рівняння Бернуллі для цього потоку реальної (в'язкої) рідини можна знайти, якщо підсумувати повні питомі енергії усіх елементарних струминок з урахуванням втрат енергії у струминках.

Рівняння Бернуллі приведено до одиниці ваги, тому вагова витрата рідини у елементарній струминці визначиться, якщо усі члени рівняння помножити на $\rho \cdot g \cdot dQ$:

$$\left(\frac{U_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 \right) \cdot \rho \cdot g \cdot dQ = \left(\frac{U_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + h_{S_{1-2}} \right) \cdot \rho \cdot g \cdot dQ.$$

Про інтегруємо це рівняння по живому перерізу потоку:

$$\int_{S_1} \frac{U_1^2}{2 \cdot g} \cdot \rho \cdot g \cdot dQ + \int_{S_1} \left(\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 \right) \cdot \rho \cdot g \cdot dQ = \int_{S_2} \frac{U_2^2}{2 \cdot g} \cdot \rho \cdot g \cdot dQ + \int_{S_2} \left(\frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 \right) \cdot \rho \cdot g \cdot dQ + \int_{S_2} h_{S_{1-2}} \cdot \rho \cdot g \cdot dQ.$$

Перебудуємо одержану функцію наступними перетвореннями:

$$\int_S \frac{U^2}{2 \cdot g} \cdot \rho \cdot g \cdot dQ = \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot g} \cdot \int_S U^3 \cdot dS, \text{ тому що } dQ = U dS.$$

Для усталеного виду руху рідини із достатньою для інженерних розрахунків точністю можна визначити середню швидкість потоку V наступним перетворенням:

$$\frac{\rho \cdot g}{2 \cdot g} \cdot \int_S U^3 \cdot dS = \frac{\rho \cdot g \cdot V^3 \cdot S}{2 \cdot g} = \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot g} \cdot V^2 \cdot Q = \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot \rho \cdot g \cdot Q,$$

де Q - витрата потоку, $Q = V \cdot S$.

$\frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot \rho \cdot g \cdot Q$ - "умовна" кінетична енергія потоку, яка відрізняється

від дійсної $\frac{\rho \cdot g}{2 \cdot g} \cdot \int_S U^3 \cdot dS$.

Відношення цих енергій має назву коефіцієнта Каріоліса:

$$\alpha = \frac{\frac{\rho \cdot g}{2 \cdot g} \cdot \int_S U^3 \cdot dS}{\frac{\rho \cdot g}{2 \cdot g} \cdot V^2 \cdot Q} = \frac{\int_S U^3 \cdot dS}{V^2 \cdot Q}.$$

Кінематична енергія, яка визначена за середньою швидкістю потоку у даному перерізі, не дорівнює кінетичній енергії, яка розрахована як сума енергій елементарних струминок у живому перерізі. Коефіцієнт Каріоліса називають коефіцієнтом кінетичної енергії. Цей коефіцієнт може характеризувати нерівномірність розподілу швидкості руху по живому перерізу потоку. Звичайно коефіцієнт α визначається шляхом експериментального дослідження. Так, для турбулентного режиму руху він дорівнює 1,03...1,1, а для ламінарного $\alpha = 2$.

Для усіх елементарних струминок у даному живому перерізі сума питомих потенціальних енергій тиску і положення $(P/(\rho \cdot g) + z)$ є постійною величиною, тоді:

$$\int_S \left(\frac{P}{\rho \cdot g} + z \right) \cdot \rho \cdot g \cdot dQ = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{P}{\rho \cdot g} + z \right) \cdot \int_S U \cdot dS =$$

$$= \rho \cdot g \cdot \left(\frac{P}{\rho \cdot g} + z \right) \cdot V \cdot S = \left(\frac{P}{\rho \cdot g} + z \right) \cdot \rho \cdot g \cdot Q.$$

Якщо у всіх елементарних струминках середня втрата питомої енергії при руху рідини від переріза 1 до переріза 2 (рис. 2.6) однакові, тоді:

$$\int_S h_{S_{1-2}} \cdot \rho \cdot g \cdot dQ = h_{S_{1-2}} \cdot \rho \cdot g \cdot \int_S U \cdot dS = h_{S_{1-2}} \cdot \rho \cdot g \cdot V \cdot S = h_{S_{1-2}} \cdot \rho \cdot g \cdot Q.$$

Тоді рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини визначиться:

$$\frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2 \cdot g} \cdot \rho \cdot g \cdot Q + \left(\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 \right) \cdot \rho \cdot g \cdot Q =$$

$$= \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2 \cdot g} \cdot \rho \cdot g \cdot Q + \left(\frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 \right) \cdot \rho \cdot g \cdot Q + h_{S_{1-2}} \cdot \rho \cdot g \cdot Q.$$

Віднесемо рівняння до одиниці ваги, для цього поділимо усі його члени на $\rho \cdot g \cdot Q$. Таким чином рівняння Бернуллі для цього потоку в'язкої рідини визначиться:

$$\frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + h_{S_{1-2}}.$$

Для цілого потоку реального газу використовують наступне рівняння:

$$\frac{V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{K}{K-1} \cdot \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{K}{K-1} \cdot \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + h_{S_{1-2}},$$

де K – показник адіабати, $K = 1,405$.

Рівняння Бернуллі використовується для рішення різноманітних практичних задач гідродинаміки. Так, наприклад, з використанням рівняння Бернуллі визначається швидкість руху у конкретній точці живого перерізу потоку за допомогою прибору Прандтля (рис. 2.4), а також прибору Вентурі, який може вимірювати середню швидкість і витрату потоку (рис. 2.7). Витратомір Вентурі являє собою конусну трубу малої

довжини ($L = 3 \dots 5 D$), внутрішня поверхня гарно оброблена з метою максимально знизити втрати питомої енергії. На вході і виході із конусної труби встановлюються прилади для вимірювання надлишкового тиску. При переході рідини із більшого перерізу діаметром D до меншого діаметром d частина потенційної енергії рідини переходить у кінетичну. Нехай витратомір буде встановлений горизонтально і порівняльну площину 0-0 візьмемо по осі конусної труби, тоді $Z_1 = Z_2 = 0$.

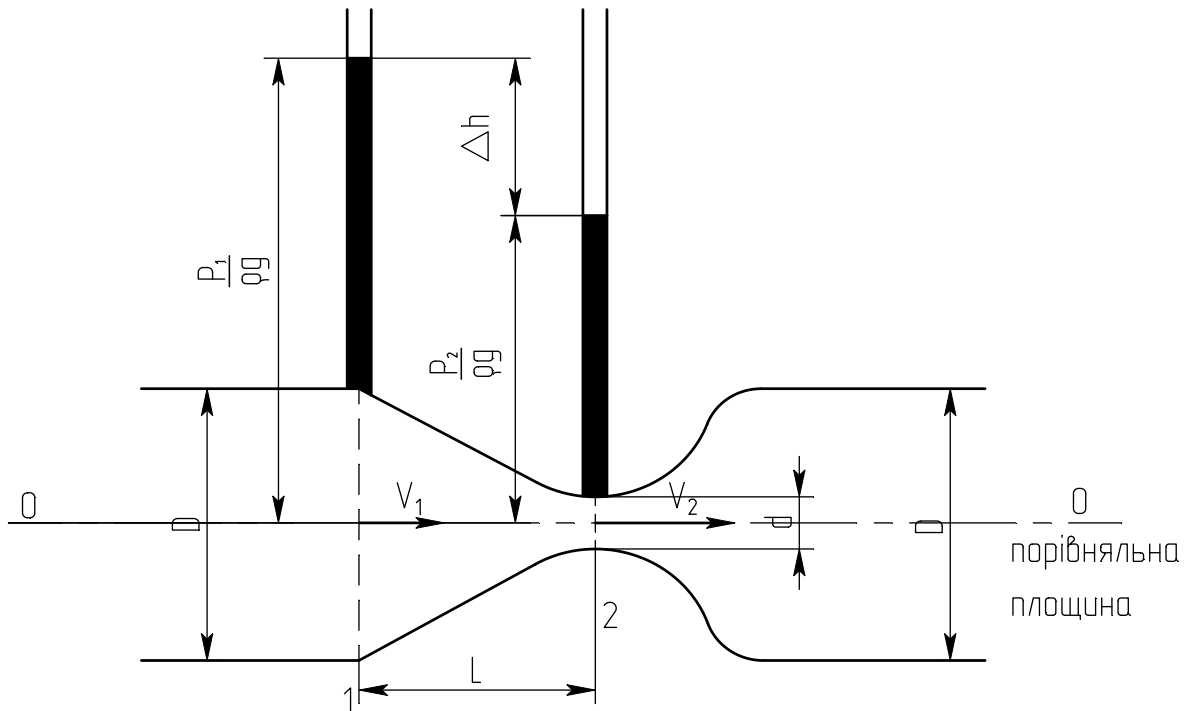


Рисунок 2.7 – Схема витратоміра Вентурі

Якщо не враховувати втрати питомої енергії на довжині L , то рівняння Бернуллі набуде вигляду:

$$\frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g}.$$

Рівняння нерозривності потоку рідини:

$$V_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = V_2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = Q = const,$$

звідки:

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{D^2}{d^2},$$

тоді:

$$\Delta h = \frac{P_1}{\rho \cdot g} - \frac{P_2}{\rho \cdot g} = \frac{V_1^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\alpha_2 \cdot \frac{D^4}{d^4} - \alpha_1 \right),$$

де Δh - різниця надлишкових тисків у перерізах 1 і 2.

Середня швидкість потоку визначиться:

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha_2 \cdot \frac{D^4}{d^4} - \alpha_1}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}.$$

Витрати рідини у циліндричній трубці розрахуються:

$$\begin{aligned} Q &= V_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_2 \cdot \frac{D^4}{d^4} - \alpha_1}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} = \\ &= \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\alpha_2 \cdot \frac{D^4}{d^4} - \alpha_1}} \cdot \sqrt{\Delta h} = K \cdot \sqrt{\Delta h}, \end{aligned}$$

де K – це постійна витратоміра,
$$K = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\alpha_2 \cdot \frac{D^4}{d^4} - \alpha_1}};$$

α_1 і α_2 - коефіцієнти Каріоліса, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,1$.

З урахуванням втрат питомої енергії, особливо після виходу рідини із витратоміра, витрата рідини у циліндричній трубці визначиться:

$$Q = \mu \cdot K \cdot \sqrt{\Delta h},$$

де μ - тарувальний коефіцієнт, $\mu = 0,95 \dots 0,97$.

Для вимірювання витрат застосовується діафрагма, що монтується між фланцями трубопроводу. Потік, що проходить через отвір діафрагми, спочатку стискається, а потім починає розширюватися. Для зменшення витрат питомої енергії при проходженні через отвір діафрагми, остання виконується з гострими кромками (рис. 2.8).

У цьому випадку рівняння Бернуллі набуде вигляду:

$$\frac{\alpha_1 \cdot V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + h_{S_{1-2}} = \frac{\alpha_2 \cdot V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \varepsilon \frac{V_2^2}{2 \cdot g},$$

де $h_{S_{1-2}}$ - втрати питомої енергії, $h_{S_{1-2}} = \varepsilon \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$;

ε - коефіцієнт місцевого опору.

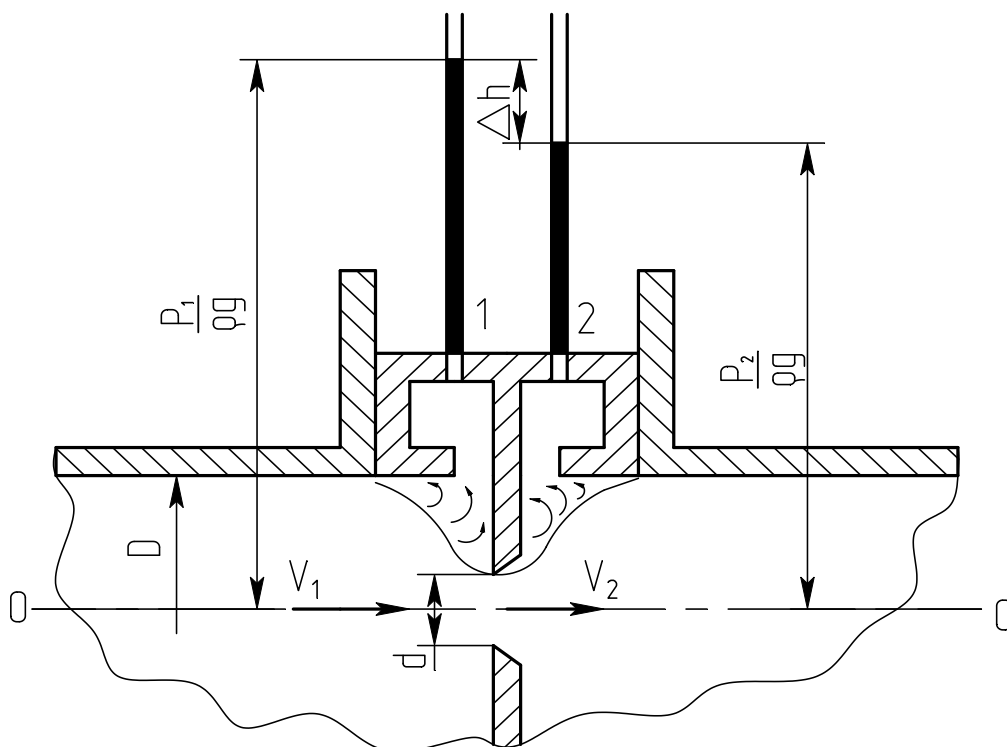


Рисунок 2.8 – Схема вимірної витрати рідини діафрагми

Аналогічно методики, розглянутої вище, можна отримати рівняння витрати рідини $Q = f(\Delta h)$.

З застосуванням рівняння Бернуллі можна знайти середню швидкість витікання рідини через отвір, який знаходиться на дні посудини, у якій рівень рідини підтримується постійним (рис. 2.9).

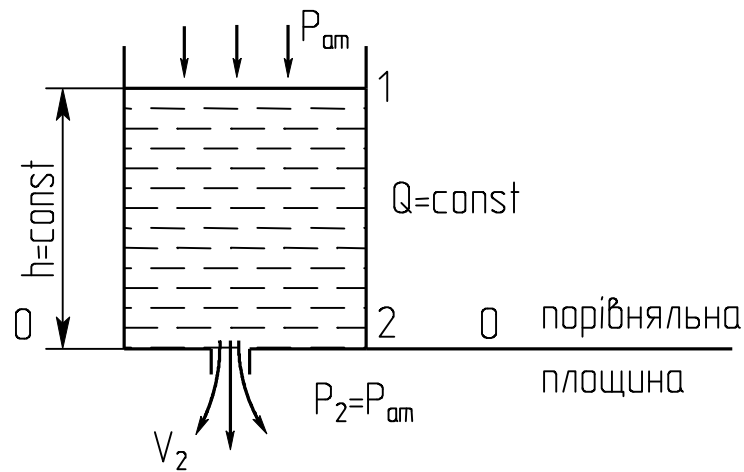


Рисунок 2.9 – Схема посудини з отвором

Рівняння Бернуллі для перерізів 1 і 2:

$$\frac{V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2.$$

У цьому випадку: $z_1 = h$; $P_1 = P_2 = P_{ам}$; $V_1 = 0$; $z_2 = 0$.

З рівняння визначимо V_2 :

$$h = \frac{V_2^2}{2 \cdot g},$$

звідки:

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Якщо на вільну поверхню рідини діє тиск $P_1 > P_{ам}$, а $h = const$ і $P_2 = P_{ам}$. За цих умов:

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + h = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_{ам}}{\rho \cdot g},$$

звідки:

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(\frac{P_1 - P_{ам}}{\rho \cdot g} \right)}.$$

На рисунку 2.10 розглядається схема струминного насоса.

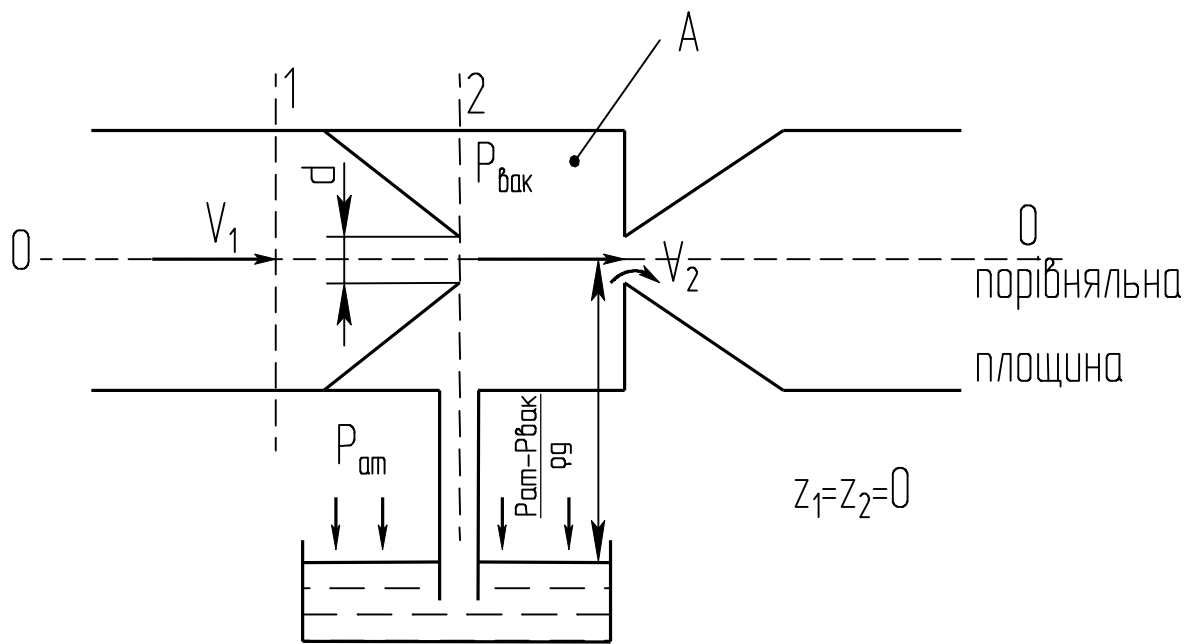


Рисунок 2.10 – Схема струминного насоса

Рівняння Бернуллі для двох перерізів:

$$\frac{V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g}; \quad \frac{V_2^2}{2 \cdot g} - \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = \frac{P_1}{\rho \cdot g} - \frac{P_2}{\rho \cdot g}.$$

Із рівняння нерозривності потоку визначимо:

$$Q = V_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = V_2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \quad V_2 = V_1 \cdot \frac{D^2}{d^2}.$$

Аналіз рівнянь показує, що при зменшенні діаметру d швидкість руху V_2 підвищується, а тиск P_2 зменшується. Можна визначити таке значення d , при якому тиск P_2 стане менше атмосферного, і тоді у порожнині А виникне вакуум. Під дією різниці тисків $P_{\text{ат}} - P_{\text{вак}}$ із бака буде усмоктуватися рідина у камеру А і змішуватися з основним потоком робочого середовища.

З застосуванням рівняння Бернуллі виконуються експериментальні дослідження витрати напору (питомої енергії) при руху рідини через гідравлічні пристрої (рис. 2.11).

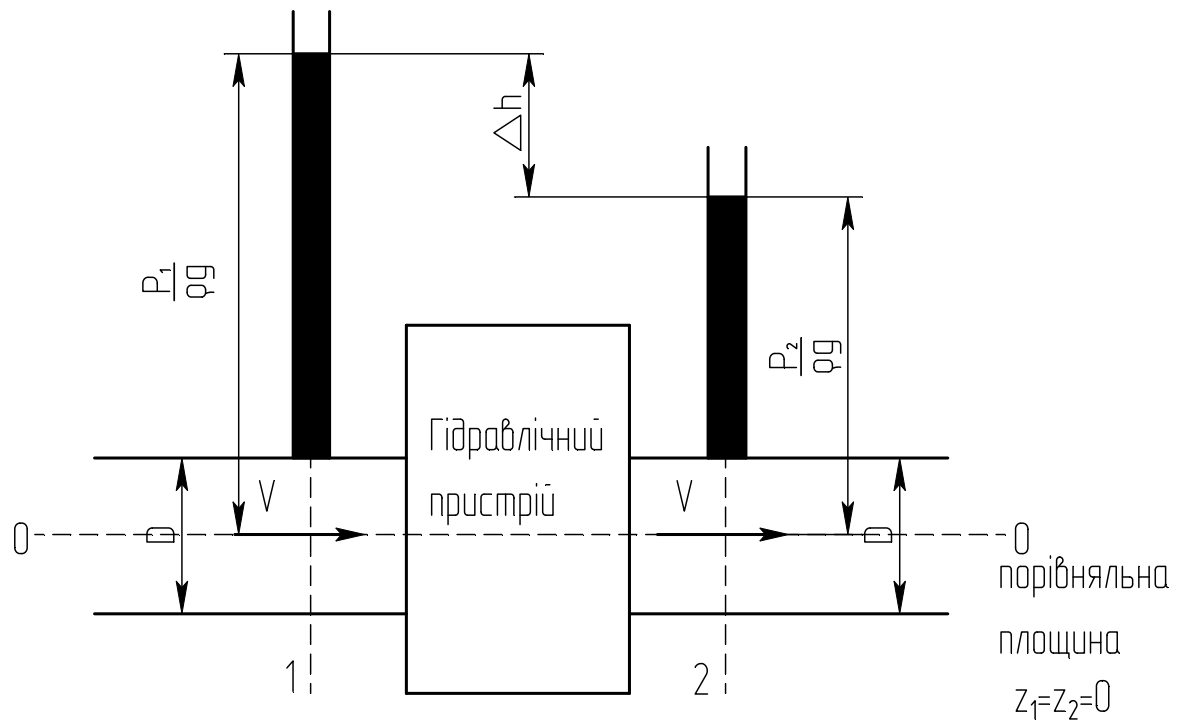


Рисунок 2.11 – Схема експериментального стенда

Рівняння Бернуллі для перерізів 1 і 2 за умовами того, що трубопровід має однаковий діаметр визначиться:

$$\frac{\alpha \cdot V^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{\alpha \cdot V^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + h_{S_{1-2}},$$

звідки: витрати напору (питомої енергії):

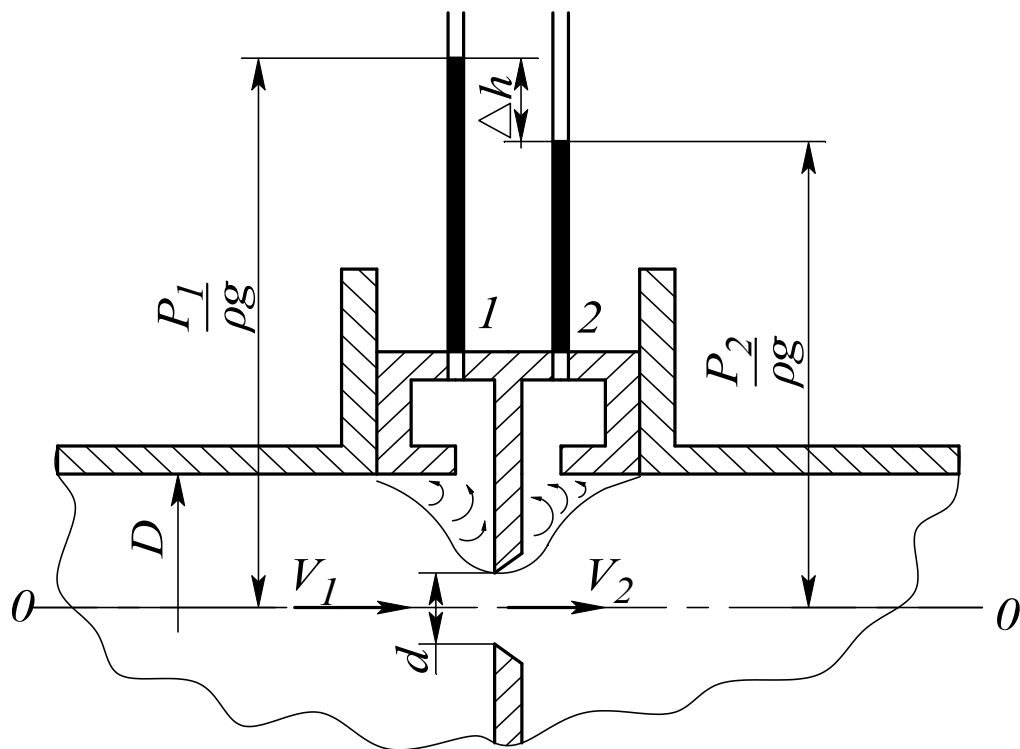
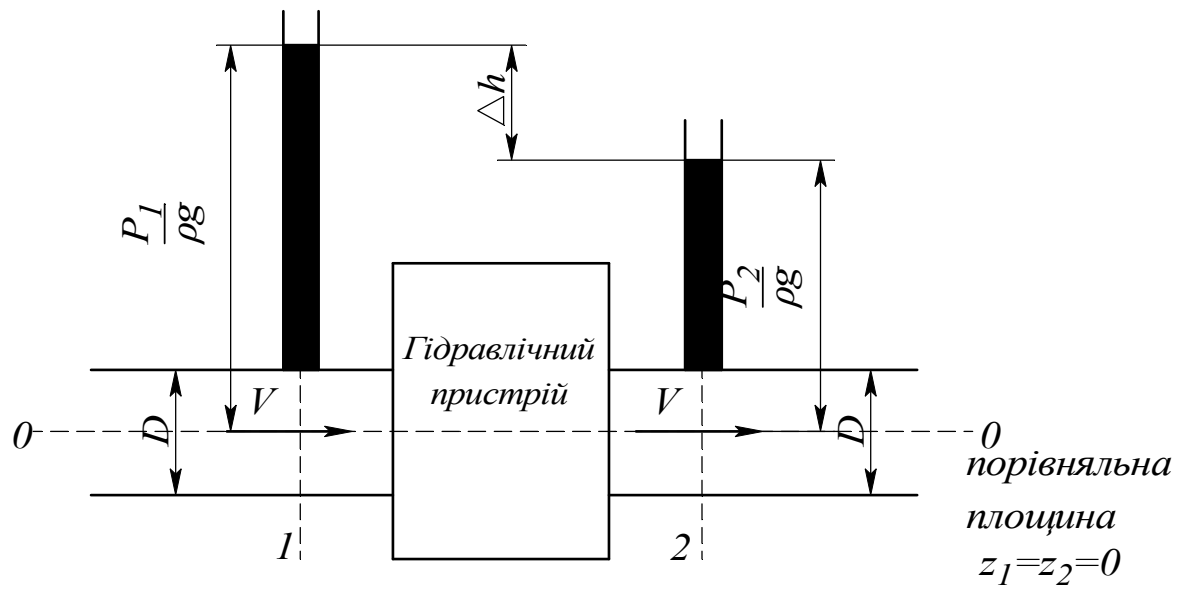
$$h_{S_{1-2}} = \frac{P_1}{\rho \cdot g} - \frac{P_2}{\rho \cdot g} = \Delta h.$$

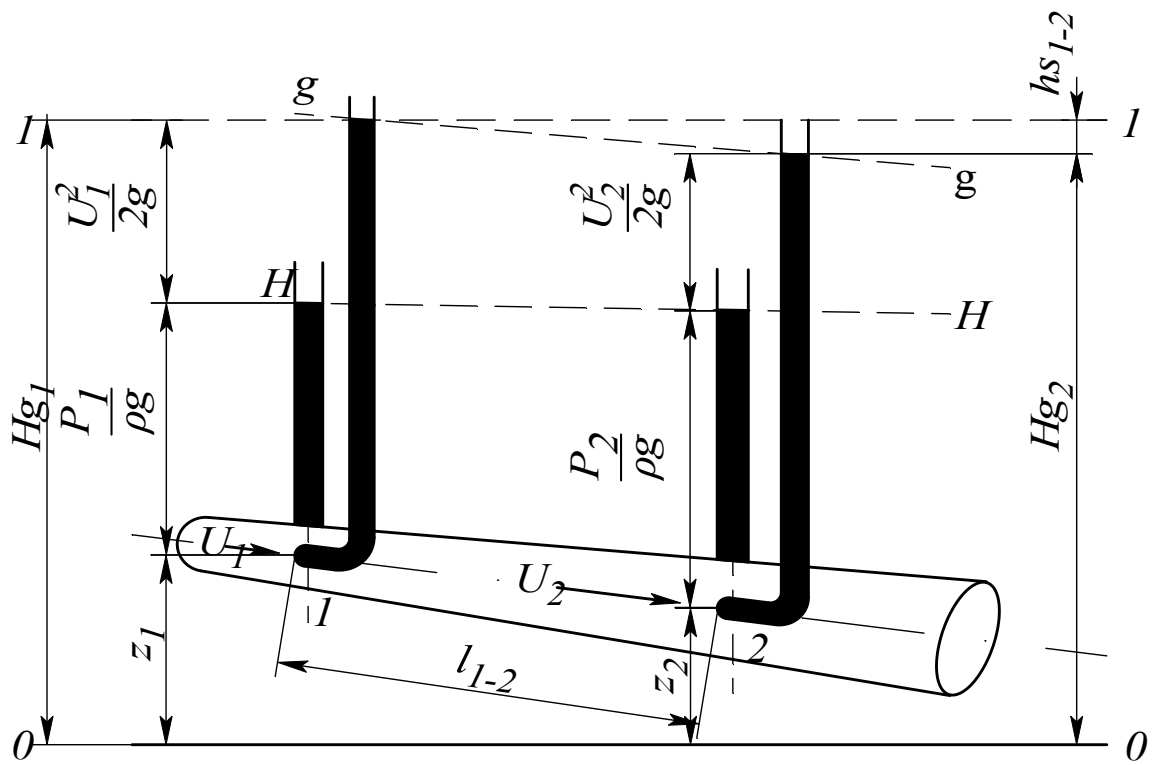
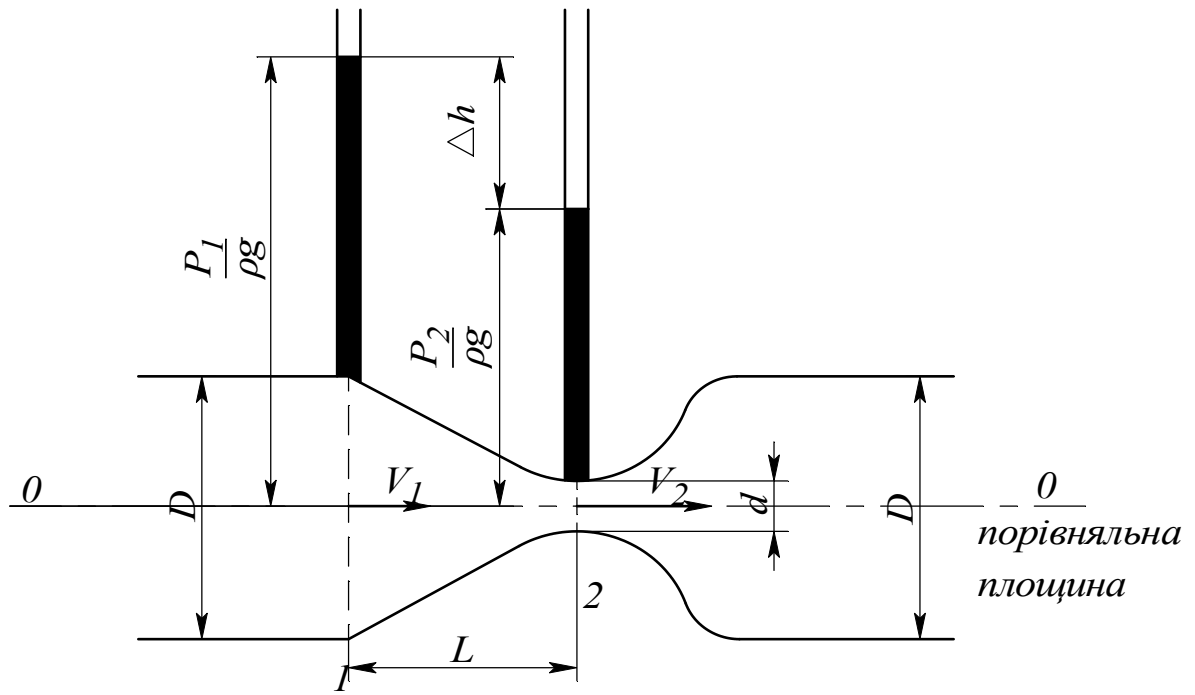
У реальних гідроприводах і гідравлічних пристроях повна втрата напору (питомої енергії) складається із наступних втрат:

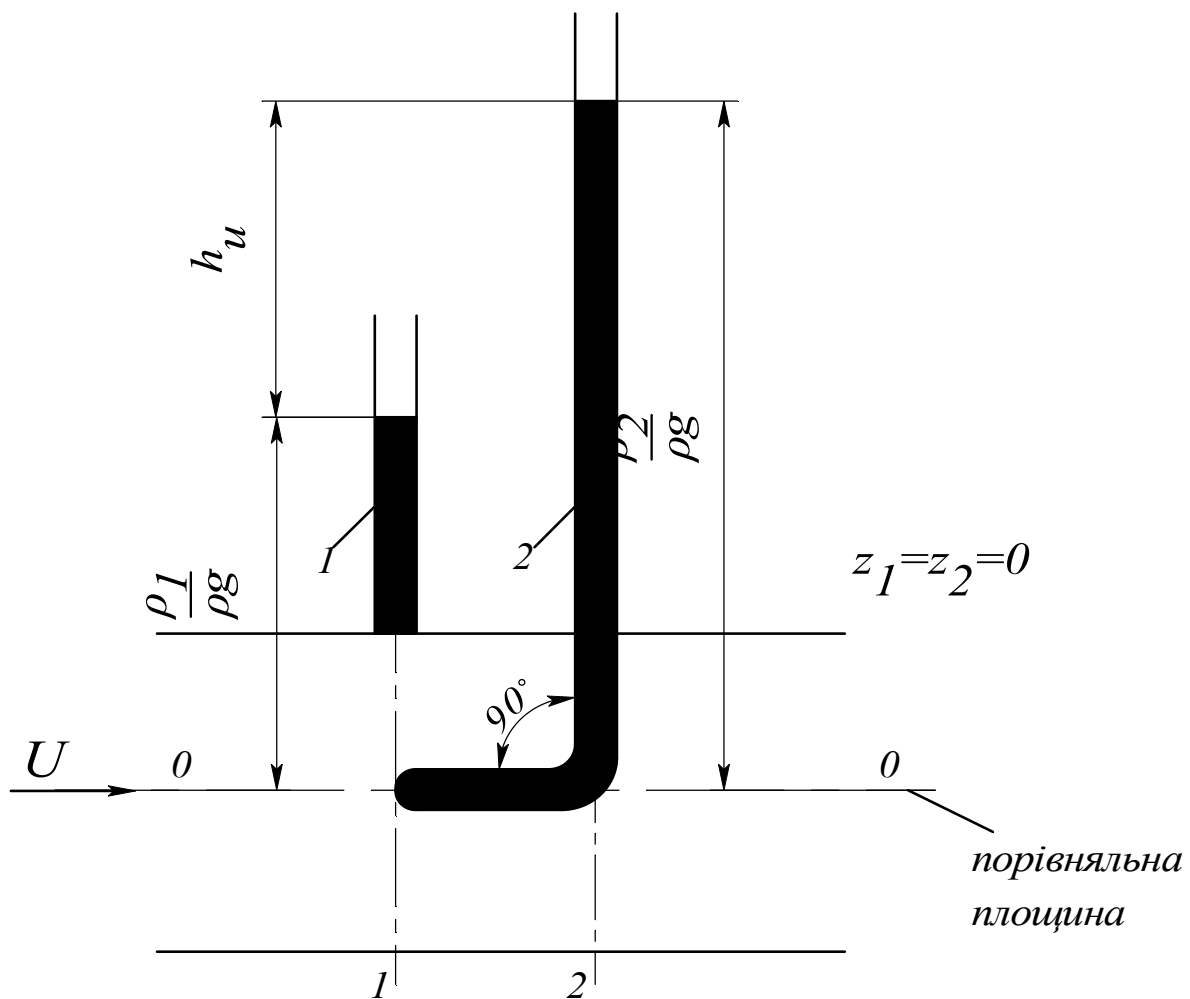
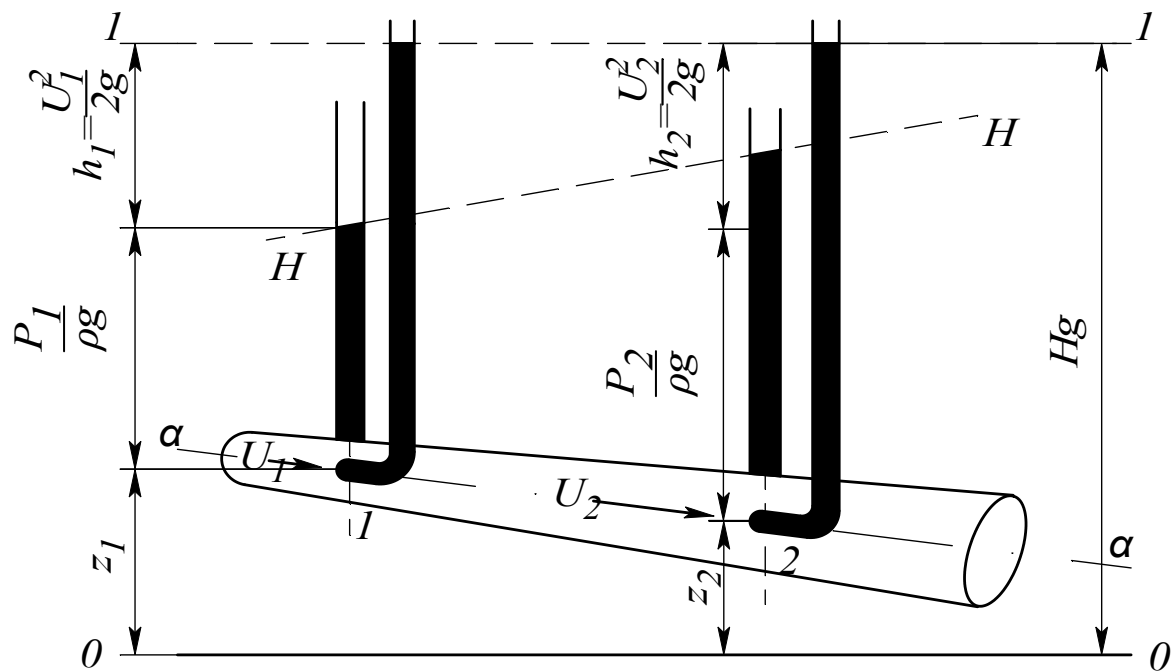
- втрати напору в опорах, обумовлених в'язким тертям по довжині - h_l ;
- втрати напору у місцевих гідравлічних опорах - h_M .

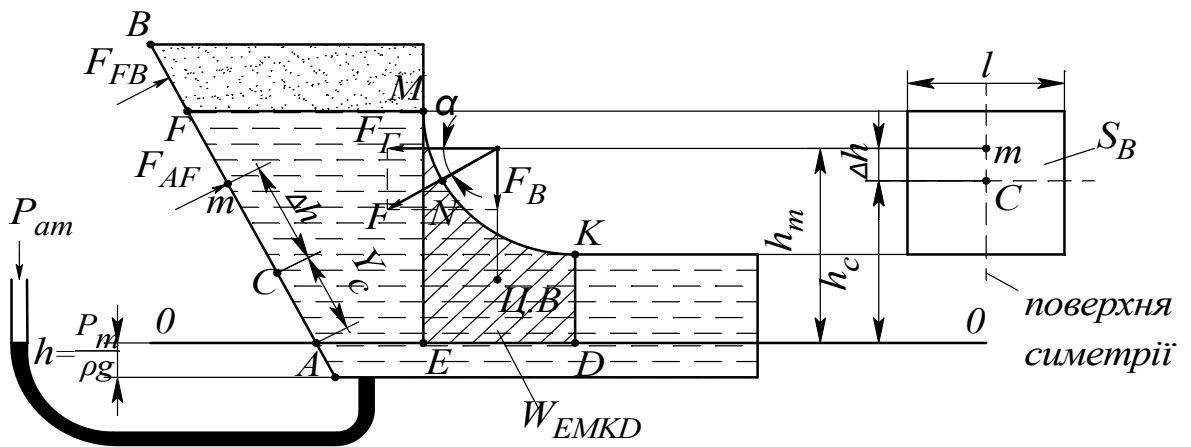
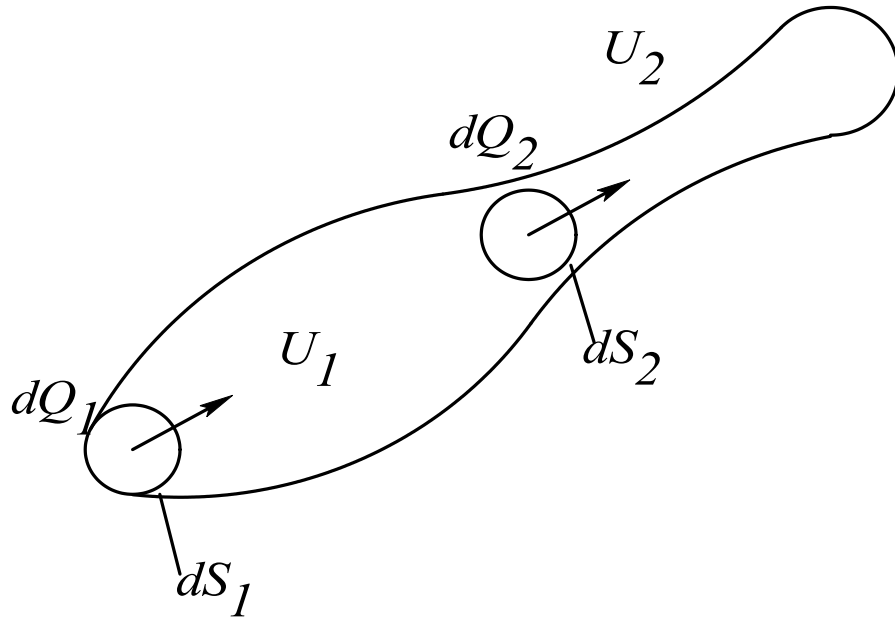
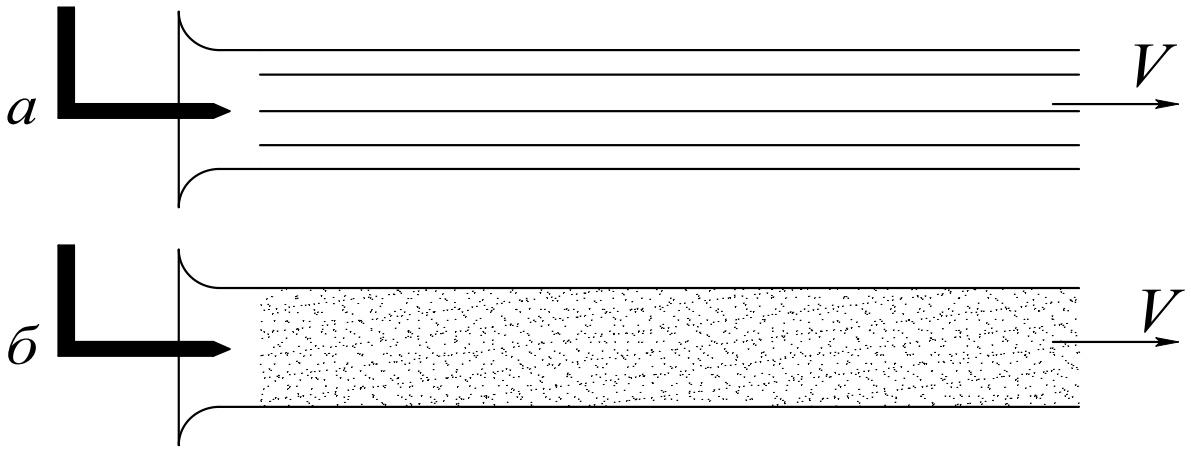
2.2.2 Контрольні питання

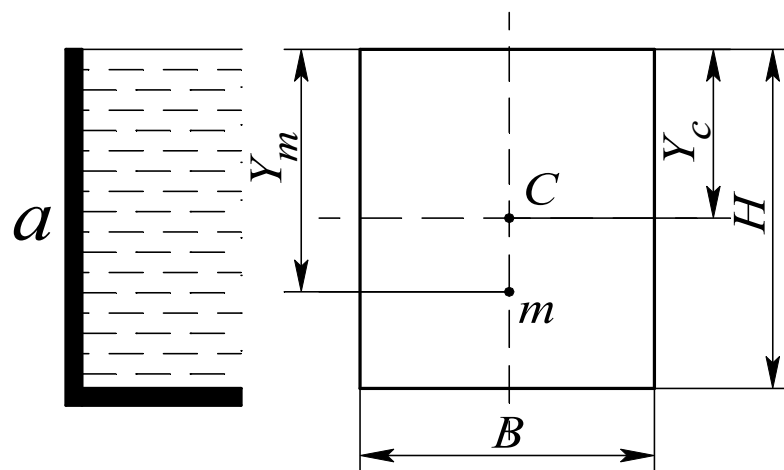
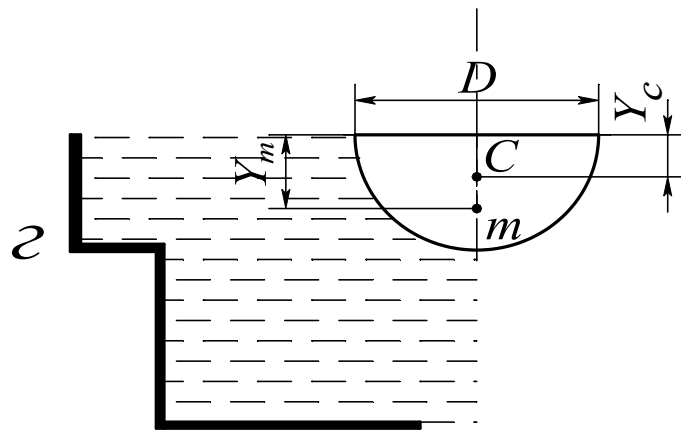
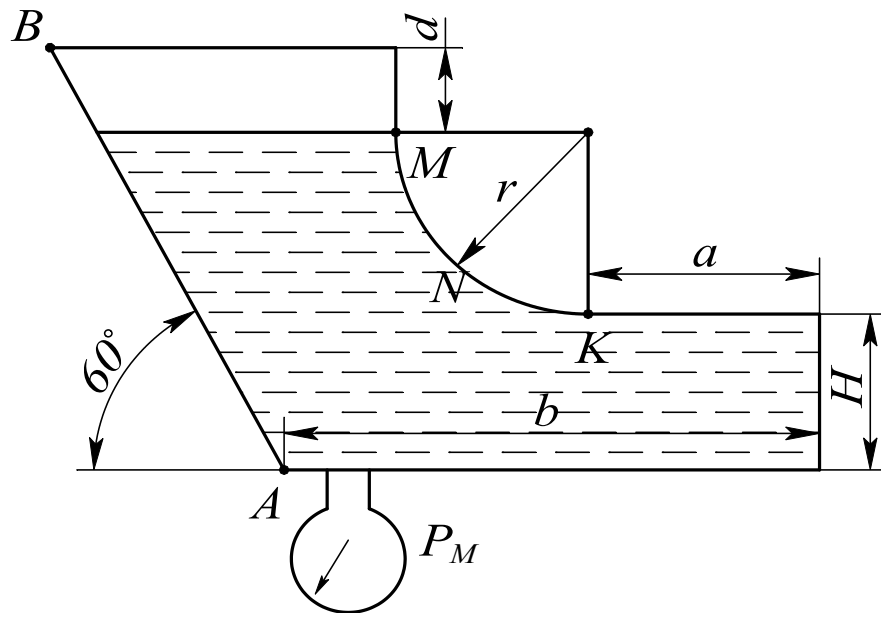
- 1 У чому полягає динаміка рідини?
- 2 Що собою являють диференціальні рівняння руху ідеальної рідини – рівняння Л.Ейлера?
- 3 Як записати і обґрунтувати рівняння Д.Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини?
- 4 Як обґрунтувати геометричний і енергетичний змісти рівняння Д.Бернуллі?
- 5 Як вивести залежність рівняння Д.Бернуллі для усталеного руху реальної рідини для цілого потоку?
- 6 Що являє собою коефіцієнт Каріоліса і який його фізичний зміст?
- 7 Які приклади практичного застосування рівняння Д.Бернуллі?

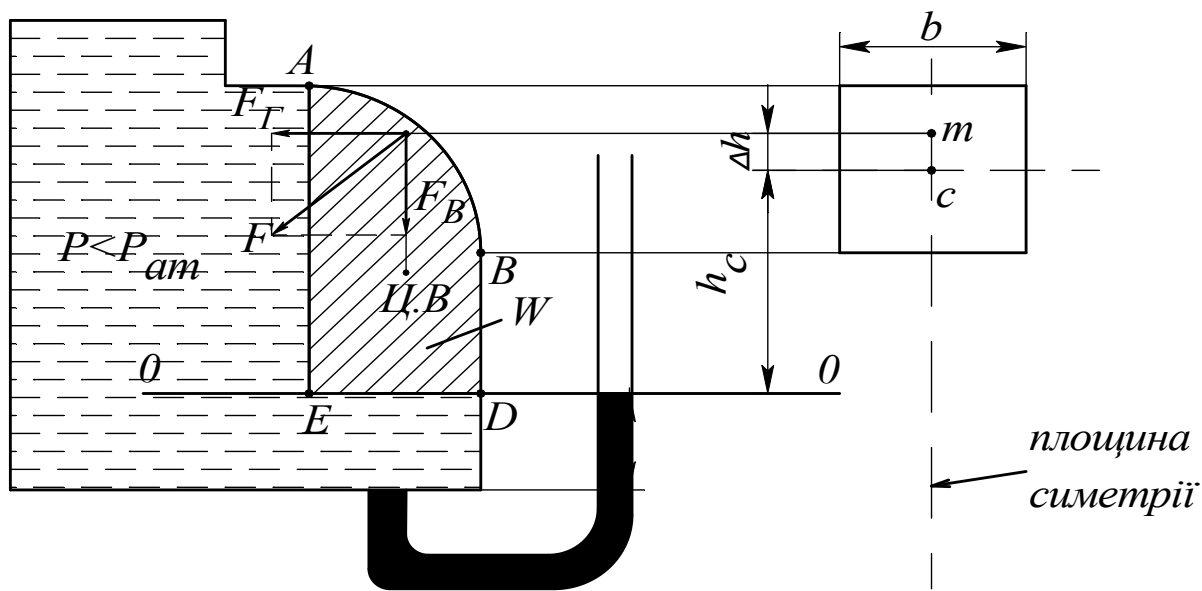
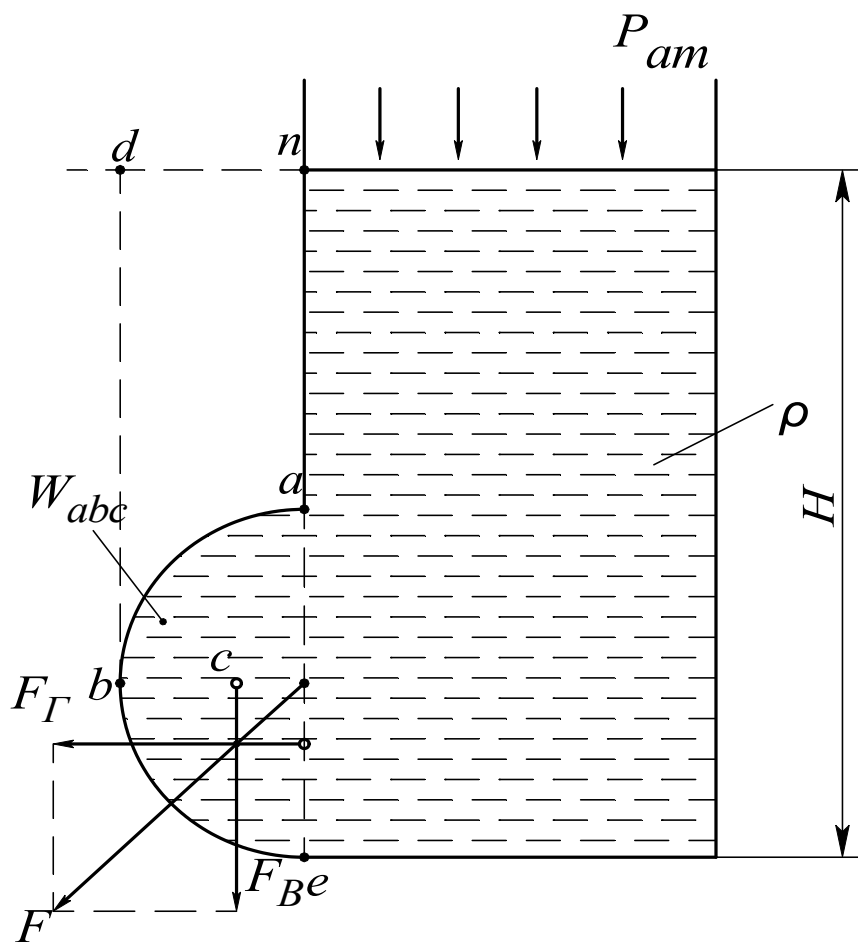


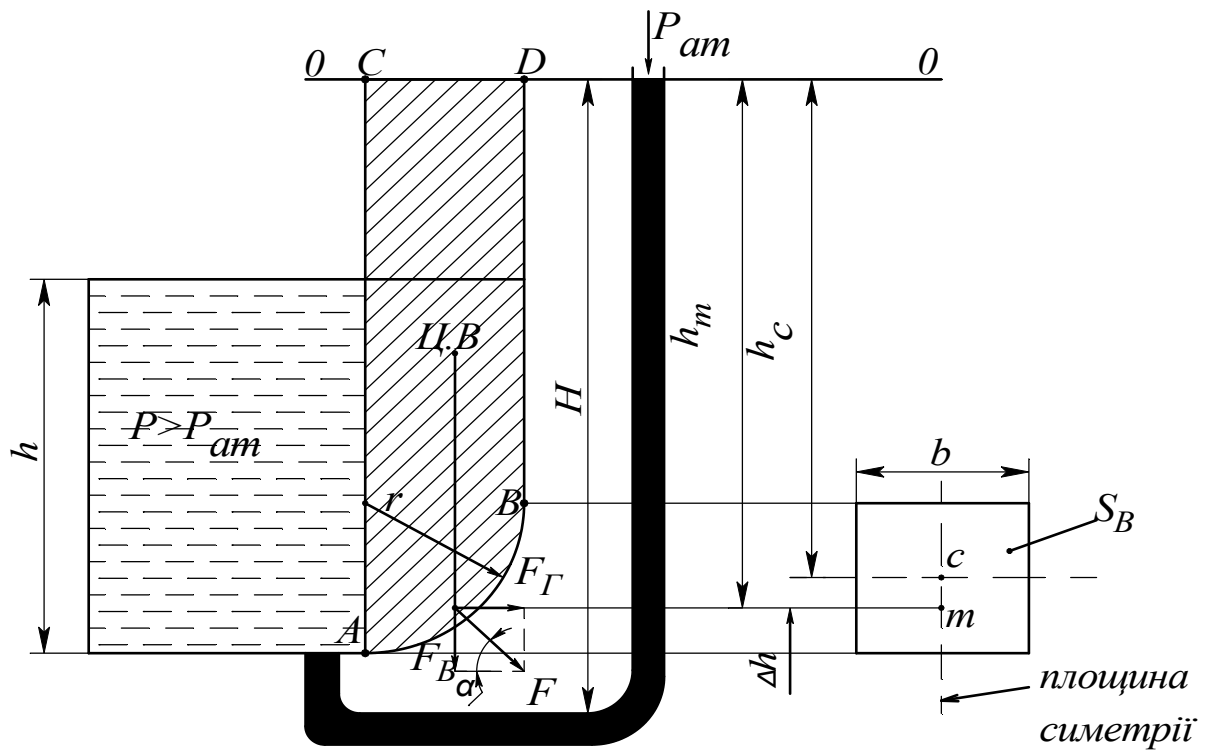
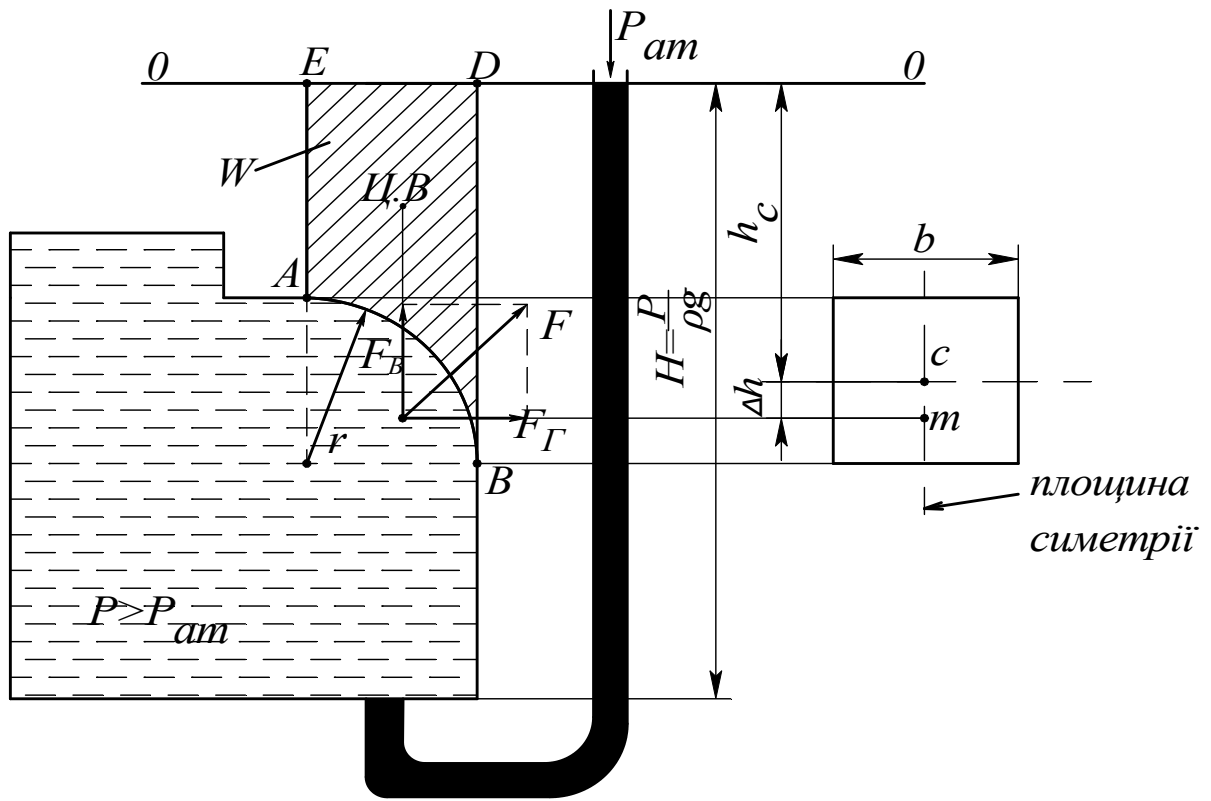


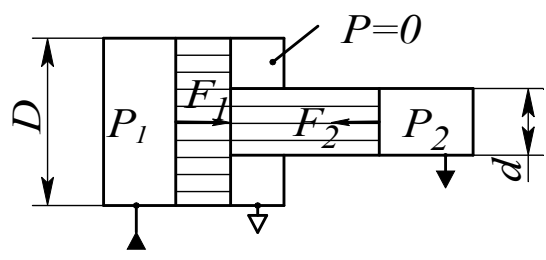
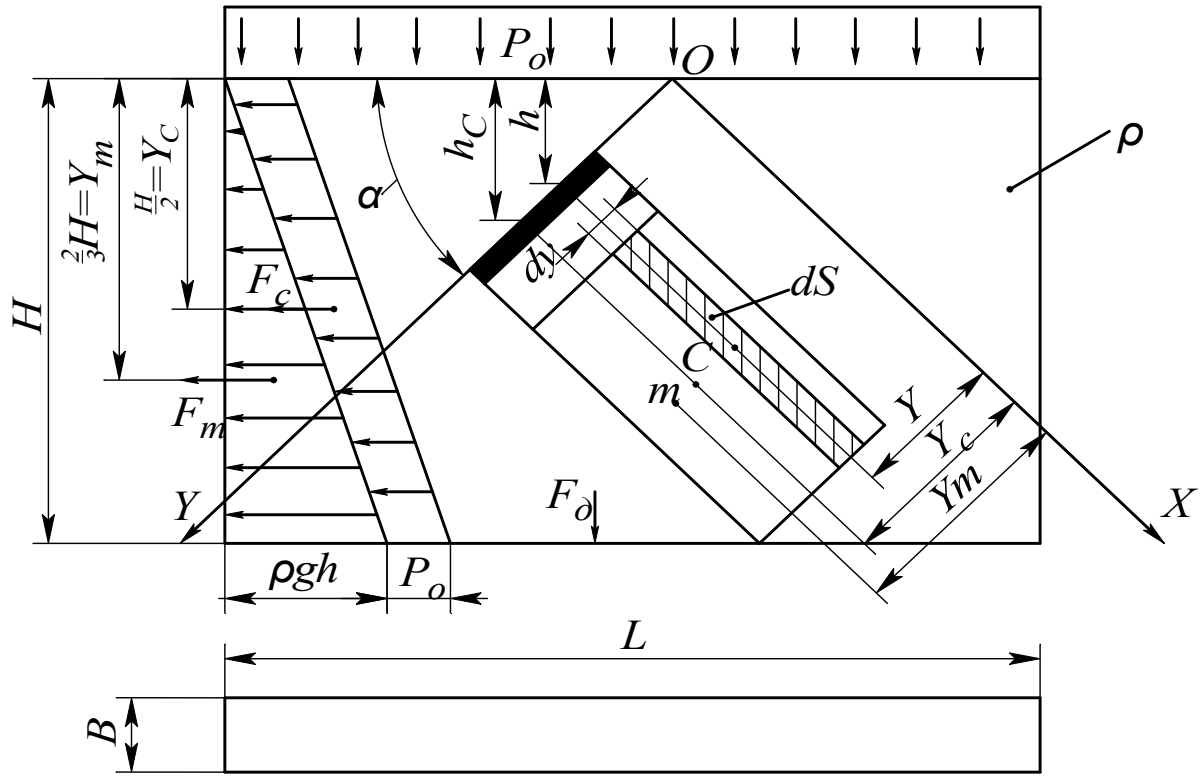
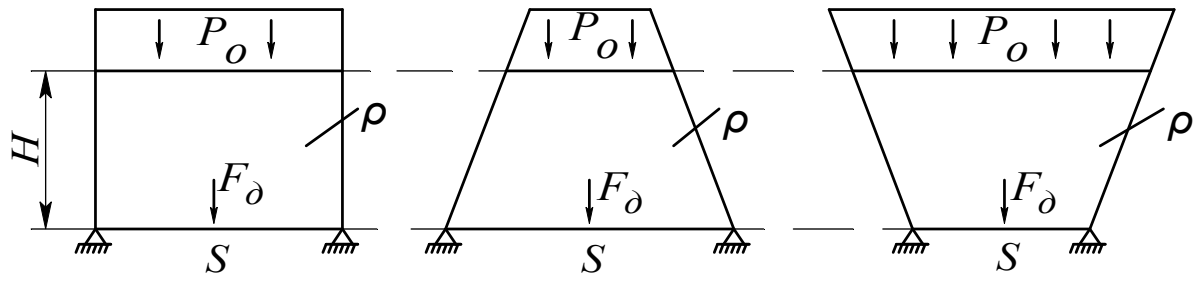




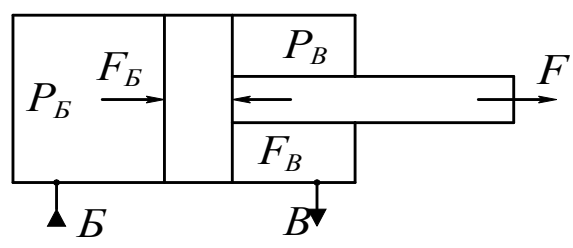








a



б

